APPROXIMATION VON EMPIRISCHEN (GRUPPIERTEN) HÄUFIGKEITSVERTEILUNGEN DURCH PEARSON–FUNKTIONEN ANHAND EINER MODIFIZIERTEN, MEHRSTUFIGEN MOMENTENMETHODE

Dissertation zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaften
der Rechts- und
Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes
(doctor rerum politicarum)

Heinz Schneider

1977

APPROXIMATION VON EMPIRISCHEN (GRUPPIERTEN) HÄUFIGKEITSVERTEILUNGEN DURCH PEARSON-FUNKTIONEN ANHAND EINER MODIFIZIERTEN, MEHRSTUFIGEN MOMENTENMETHODE

Dissertation zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaften
der Rechts- und
Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes
(doctor rerum politicarum)

Heinz Schneider

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der Disputation : 18. Februar 1977
Dekan : Prof. Dr. Wolfgang Kilger
Erstberichterstatter : Prof. Dr. Hans Schneeweiß
Zweitberichterstatter: Prof. Dr. Werner Neubauer

Inhaltsverzeichnis

		Seite
0.	Einleitung	1
1.	Systeme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen	3
1.1	Systeme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die durch eine Transformation der vorgegebenen Zufallsvariable charakterisiert sind	6
1.2	Systeme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die durch eine Reihenentwicklung charakterisiert sind	9
1.3	Systeme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die durch eine Differentialgleichung definiert sind	23
2.	Das PEARSON-System	26
2.1	Ansatz	27
2.2	Herleitung der Haupttypen des PEARSON-Systems	37
2.3	Die Spezialtypen des PEARSON-Systems	77
2.4	Zusammenfassung	140
3.	Approximation von empirisch ermittelten Häufigkeitsverteilungen durch PEARSON-Funktionen	146
3.1	Methoden zur Ermittlung eines geeigneten PEARSON-Typs und zur Schätzung seiner Parameter	149
3.2	Anpassungstests	159
3.3	Vorgehensweise in der vorliegenden Untersuchung	170

		Seite
4.	Rechtfertigung der in 3.3 dargestellten modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode anhand von Simulationsberechnungen	177
4.1	Beschreibung des für die Simulationsberechnungen entwickelten EDV-Programms	179
4.2	Ergebnisse der Simulationsberechnungen	193
5.	Anwendung der in 3.3 dargestellten modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode bei der Approximation von empirisch ermittelten (gruppierten) Häufigkeitsverteilungen durch PEARSON-Funktionen	226
5.1	Beschreibung des Anwendungsprogramms	227
5.2	Anwendungsbeispiele (vgl. auch Anhang B)	242
5.3	Zusammenfassung und Ausblick	295
Anhang A	Zusammenstellung einiger hilfreicher Formeln	299
Anhang B	Ergebnisse und Zeichnungen zu den in 5.2 besprochenen Beispielen	305
Literaturverzeichnis		507

0. Einleitung

Ausgangspunkt für diese Untersuchung war unser Wunsch, vorgegebene, bereits gruppierte empirische Häufigkeitsverteilungen möglichst gut durch theoretische Verteilungen zu approximieren. Diese Approximationsversuche wollten wir mit Hilfe eines für diesen Zweck zu entwickelnden EDV-Programms unternehmen.

Bei der Entwicklung dieses Programms mußten wir zunächst eine Entscheidung darüber treffen, welche theoretischen Verteilungen wir für diese Approximationsversuche heranziehen sollten.

Am geeignetsten erschien es uns, mit einem System von Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu arbeiten, und zwar wegen des Vorteils, daß sich die einzelnen Funktionen eines solchen Systems i.a. relativ einfach anhand gewisser Parameterwerte definieren und unterscheiden lassen, die man anhand der jeweils vorgegebenen empirischen Verteilung zu ermitteln hat.

In Kapitel 1 haben wir die wohl wichtigsten und bekanntesten Systeme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen zusammengestellt und kurz charakterisiert.

Für unsere Zwecke am günstigsten erschien uns das PEARSON-System, das praktisch alle "gängigen" theoretischen Verteilungen enthält. Dieses System haben wir in Kapitel 2 recht ausführlich dargestellt, wobei wir uns an eine entsprechende Darstellung in [1] anlehnen, bei der Entwicklung der einzelnen Formeln jedoch etwas andere Wege gehen, weil uns das für die Programmierung günstiger erschien.

Das PEARSON-System ist eine Familie von unimodalen bzw. J- bzw. U-förmigen Dichtefunktionen, die alle einer bestimmten Differentialgleichung erster Ordnung genügen. Der Funktionstyp und die Parameterwerte einer PEARSON-Funktion sind eindeutig durch die Werte der ersten vier Momente bestimmt.

Will man nun eine vorgegebene empirische Verteilung durch eine PEARSON-Funktion approximieren, so sind aus der empirischen Verteilung die ersten vier Momente zu schätzen. Anhand dieser Momentenschätzungen ist dann für die gewünschte Approximationsfunktion der entsprechende Kurventyp zu bestimmen, und es sind seine Parameterwerte zu berechnen. Voraussetzung für einen solchen Approximationsversuch ist dabei, daß die Kurvenform der empirischen Verteilung so ist, daß eine Approximation durch eine PEARSON-Verteilung überhaupt möglich erscheint.

Zur Ermittlung der Parameterschätzungen stehen verschiedene Schätzmethoden zur Verfügung, auf die wir in 3.1 kurz eingehen.

Allgemein verwendbar und nicht zu aufwendig bzgl. Rechenzeit und Speicherplatz ist für ein EDV-Programm davon nur die Momentenmethode. In ersten Tests erwies sich diese Methode jedoch nicht als ausreichend gut. Dabei hätte man aufgrund der Kurvenform der betrachteten empirischen Verteilungen eigentlich erwartet, daß man eine geeignete Approximationsfunktion aus dem PEARSON-System finden würde.

Diese Ergebnisse machen deutlich, daß das PEARSON-System zwar recht bekannt ist, daß in der Praxis jedoch recht wenig mit ihm gearbeitet wird.

Nachdem wir in 3.2 kurz auf Fragen zur Beurteilung der Approximationsgüte eingehen, schlagen wir deshalb in 3.3

eine mehrstufige Schätzmethode vor, die zum einen auf der Momentenmethode basiert und zum andern die Eigenschaft der PEARSON-Funktion ausnutzt, eine relativ einfache Kurvenform zu besitzen.

Den Ansatz für diese Methode rechtfertigen wir zunächst anhand der Ergebnisse von Simulationsberechnungen, auf die wir in 4 eingehen.

Dann betrachten wir in 5 eine ganze Reihe von Anwendungsbeispielen.

In diesen Beispielen werden die Vorteile unserer mehrstufigen Schätzmethode gegenüber der herkömmlichen Momentenmethode recht deutlich sichtbar.

Zur Auswahl der Beispiele ist anzumerken, daß zwar der oben genannte Effekt aufgezeigt werden sollte, daß andererseits aber auch Wert darauf gelegt wurde, auf Schwierigkeiten einzugehen, die sich allgemein beim Versuch, zu einer empirischen Verteilung eine geeignete Approximationsfunktion zu finden, ergeben können, und für solche Fälle einige Hinweise zu geben, wie diese Schwierigkeiten eventuell behoben werden können.

Dem bereits mit dem PEARSON-System vertrauten und mehr an den Ergebnissen dieser Untersuchung interessierten Leser wird empfohlen, sich direkt nach 3.3 zu wenden, da es uns in den Abschnitten vorher lediglich darum geht, gewisse Hilfsmittel für unsere Untersuchung bereit zu stellen und den Rahmen für diese Untersuchung abzustecken.

1. Systeme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Es gibt im wesentlichen drei unterschiedliche Ansätze, zu einem System von Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu gelangen:

(i) Es wird versucht, die vorgegebene Zufallsvariable so zu transformieren, daß die neue Zufallsvariable - zumindest angenähert - einem bekannten Wahrscheinlichkeitsgesetz gehorcht.

(ii) Es wird versucht, die vorgegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung mittels einer Reihe zu approximieren, wobei die einzelnen Summanden einer solchen Reihe eine bekannte Verteilung oder eine ihrer Ableitungen enthalten.

(iii) Es wird versucht, ein solches System anhand gewisser gemeinsamer Eigenschaften der einzelnen Mitglieder dieses Systems zu charakterisieren. Zumeist wird ein solches System dadurch definiert, daß die einzelnen Funktionen des Systems Lösungen einer bestimmten Differentialgleichung sind, die diese gemeinsamen Eigenschaften beschreibt.

Diese drei Ansätze werden in 1.1, 1.2 und 1.3 kurz dargestellt und gegebenenfalls anhand von einigen wenigen Beispielen erläutert. Bei diesen Darstellungen beschränken wir uns zudem auf Systeme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen einer eindimensionalen kontinuierlichen Zufallsvariable.

Eine ausführliche Darstellung solcher Systeme und ihrer Eigenschaften findet man in [1] , [2] und [3] . [2] bringt eine Zusammenstellung aller wichtigen Systeme von Wahr-

scheinlichkeitsverteilungen und ermöglicht es durch ein sehr umfangreiches Literaturverzeichnis, nicht nur die jeweilige Primärliteratur, sondern auch weiterführende Literatur aufzufinden.

1.1. Systeme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die durch eine Transformation der vorgegebenen Zufallsvariable charakterisiert sind

Bei diesem Ansatz wird die vorgegebene Zufallsvariable X mittels einer (streng monotonen) Transformation

(1.1-1) $Y = t(X)$

in die Zufallsvariable Y überführt, von der angenommen wird, daß sie einem "einfachen" Wahrscheinlichkeitsgesetz gehorcht Im kontinuierlichen Fall wird in der Regel angenommen, daß sich das Wahrscheinlichkeitsgesetz der neuen Zufallsvariabl Y durch eine Dichtefunktion

(1.1-2) $f(y)$

beschreiben läßt.

Bei den meisten Ansätzen dieser Art wird angenommen, daß die neue Zufallsvariable Y normalverteilt ist und somit die Dichtefunktion (1.1-2) durch

(1.1-3) $$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

gegeben ist.

Frühe Ansätze dieser Art mit der Annahme (1.1-3) stammen von GALTON (1879) und McALISTER (1879), sowie von KAPTEYN (19o3), EDGEWORTH (1898) und FECHNER (1897), die sich durch unterschiedliche Annahmen für die Transformationsfunktion (1.1-1) unterscheiden[1]:

---

1) vgl. [2], S. 1 und 36

(1.1-4a) GALTON, McALISTER: $Y = \ln (x + a)$

(1.1-4b) KAPTEYN: $Y = (x + a)^q$

(1.1-4c) EDGEWORTH: allgemeine Form von g (x)

(1.1-4d) FECHNER: $Y = \begin{cases} (x - \mu) / \sigma_1 & \text{für } x \geq \mu \\ (x - \mu) / \sigma_2 & \text{für } x < \mu. \end{cases}$

Ein neuerer Ansatz stammt von JOHNSON (1949)[1], der annimmt, daß - bei einer ursprünglich vorgegebenen Zufallsvariablen X - mit

(1.1-5a) $Z = (X - a) / b$

die Zufallsvariable

(1.1-5b) $Y = t (Z)$

normal (o,1) verteilt ist, und daß man eine Wahl zu treffen hat zwischen den folgenden Transformationen für (1.1-5b)

(1.1-6a) $t (z) = \ln (z)$ für $a < x < \infty$ (Bezeichnung: System S_L oder Lognormal-System)

bzw.

(1.1-6b) $t (z) = \ln (z/(1-z)) = 2 \tanh^{-1} (2 z - 1)$ für $a < x < a + b$ (Bezeichnung: System S_B oder System mit beschränktem Definitionsbereich der vorgegebenen Zufallsvariable)

bzw.

---

1) vgl. [2], S. 36 ff, [1], S. 122 ff und [3], S. 167 ff, sowie [4]

(1.1-6c) $t(z) = \ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right) = \sinh^{-1}(z)$ für $-\infty < x < \infty$

(Bezeichnung: System S_U oder System mit unbeschränktem Definitionsbereich der vorgegebenen Zufallsvariable).

Zu erwähnen ist, daß im JOHNSON-System u.a. auch bimodale Verteilungen enthalten sind.

1.2 Systeme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die durch eine Reihenentwicklung charakterisiert sind

Ähnlich wie bei dem Ansatz in 1.1, wo versucht wird, eine vorgegebene Zufallsvariable geeignet zu transformieren, so daß die neue Zufallsvariable - zumindest angenähert - einem bekannten und "einfachen" Wahrscheinlichkeitsgesetz gehorcht, wird hier versucht, die Dichtefunktion f (x) einer vorgegebenen Zufallsvariable mittels einer Reihenentwicklung zu approximieren, in der eine "gängige" Dichtefunktion g (x) die wesentliche Rolle spielt, d.h. man macht den Ansatz

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} c_j \, q_j(x) \, g(x) \,, \tag{1.2-1}$$

wobei k endlich oder unendlich sein kann, $\{q_j(x)\}_{j=0,\ldots,k}$ ein System von orthogonalen Funktionen ist, das eine eindeutige Reihendarstellung erlaubt und die c_j (j=0,...,k) geeignet zu wählende Konstanten sind, so daß eine möglichst gute Approximation der Dichtefunktion f (x) durch die angegebene Reihe erreicht wird[1].

Ein System von orthogonalen Funktionen $\{q_j(x)\}$ zu einer Belegungsfunktion g (x) auf dem Definitionsbereich D ist dabei dadurch definiert, daß

$$\int_{x \in D} q_i(x) \, q_j(x) \, g(x) \, dx = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq j \\ k_j \text{ für } i = j \end{cases} \tag{1.2-2}$$

wobei die k_j (j = 0,1,..., k) konstant und von Null verschie-

---

1) Zur Theorie der Reihenentwicklungen nach Orthogonalfunktionen, die in der Physik recht gebräuchlich ist, vergleiche man z.B. [5] und [6].

den sind. Dabei wird vorausgesetzt, daß obige Integrale existieren.

Besonders wichtig für eine praktische Anwendung ist der Fall, wenn es sich bei einem solchen Orthogonalsystem um ein System von orthogonalen Polynomen handelt.

ROMANOWSKY (vgl. [8]) und HILDEBRANDT (vgl. [14]) haben gezeigt, daß zu Dichtefunktionen g (x), die einer Differentialgleichung der Form

$$\text{(1.2-3)} \qquad \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{d\, g(x)}{d\, x} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

genügen, immer ein solches System von orthogonalen Polynomen existiert.

Die einzelnen Polynome $q_j(x)$ zu einer vorgegebenen Belegungsfunktion g (x) ergeben sich mit Hilfe der Formel von Rodriguez

$$\text{(1.2-4a)} \qquad q_j(x) = \frac{1}{a_j\, g(x)} \left(\frac{d}{dx}\right)^j \left[g(x) \cdot P(x)^j\right],$$

wobei die a_j Konstanten sind und P (x) ein von j unabhängiges Polynom ist; die a_j sowie das Polynom P (x) sind in Abhängigkeit von der vorgegebenen Belegungsfunktion g (x) geeignet zu wählen. ERDELYI hat gezeigt, daß P (x) ein Polynom höchstens zweiten Grades ist (vgl. [7]).

Für j = 1 erhält man aus (1.2-4a)

$$\text{(1.2-4b)} \qquad \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{a_1\, q_1(x) - P'(x)}{P(x)} \qquad \text{(vgl. (1.2-3))}.$$

In der folgenden Tabelle [1.2-T1] sind die Systeme der sogenannten "klassischen orthogonalen Polynome" mit ihrem Definitionsbereich, sowie ihrer Belegungsfunktion g (x) und dem im jeweiligen Fall zu wählenden Polynom P (x) aufgeführt[1]. Dabei ist

1) Hierzu vgl. man [2], S. 194, [8] und [14].

anzumerken, daß die angegebenen Belegungsfunktionen g (x) jeweils noch geeignet zu normieren sind, wenn sie gleichzeitig Dichtefunktionen sein sollen.

Tabelle [1.2 - T1] : Klassische orthogonale Polynome (im engeren Sinne)

Name	Definitions-bereich	g (x)	PEARSON-Typ 1)	P (x)	Bemerkungen
LEGENDRE	$[-1,1]$	1	2	$1-x^2$	
GEGENBAUER	$[-1,1]$	$(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}$	2	$1-x^2$	TSCHEBYCHEFF 1. bzw. 2. Art wenn m = 0 bzw. m = 1
JACOBI	$[-1,1]$	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	1	$1-x^2$	
HERMITE	$(-\infty,\infty)$	$\exp(-\frac{x^2}{2})$	0	1	
LAGUERRE	$[0,\infty)$	$x^{\alpha}\exp(-x)$	3	x	
HILDEBRANDT	$(-\infty,\infty)$	$(1+x^2)^{-m}\exp(-\nu\cdot\tan^{-1}x)$	4	$1+x^2$	
	$[0,\infty)$	$x^{-2m}\exp(-1/x)$	5	x^2	
	$[0,\infty)$	$x^{\alpha}(1+x)^{-\alpha-2m}$	6	$x(1+x)$	

1) hierzu vgl. Kapitel 2 und insbesondere Tabelle [2.4 - T1]

Zu den in Tabelle [1.2 - T1] aufgeführten Belegungsfunktionen der Systeme der klassischen orthogonalen Polynome sei vermerkt, daß alle diese Funktionen dem PEARSONschen System von Dichtefunktionen angehören, das wir in Kapitel 2 noch ausführlich behandeln werden.

Die in (1.2-1) auftretenden Koeffizienten c_j bestimmt man folgendermaßen: Durch Multiplikation von (1.2-1) mit $q_i(x)$ und Integration dieser Gleichung über dem Definitionsbereich D sowie durch Vertauschen von Summation und Integration bei dem Ausdruck auf der rechten Seite - wobei vorausgesetzt wird, daß alle diese Operationen möglich sind[1] - erhält man

(1.2-5a) $$\int_{x \in D} q_i(x)\, f(x)\, dx = \sum_{j=0}^{k} c_j \int_{x \in D} q_i(x)\, q_j(x)\, g(x)\, dx$$

und somit wegen (1.2-2)

(1.2-5b) $$c_i = \frac{1}{k_i} \int_{x \in D} q_i(x)\, f(x)\, dx \quad (i = 0, 1, \ldots, k).$$

Im Falle eines Systems orthogonaler Polynome gilt für jedes $q_i(x)$

(1.2-6a) $$q_i(x) = \sum_{l=0}^{i} b_{l,i}\, x^l \;;$$

bezeichnen wir das l-te Moment der durch f (x) gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung in dem betrachteten (beliebigen)Koordinatensystem mit

(1.2-6b) $$\mu_l' = \int_{x \in D} x^l\, f(x)\, dx \;,$$

so erhalten wir mit (1.2-5b)

(1.2-6c) $$c_i = \frac{1}{k_i} \sum_{l=0}^{i} b_{l,i} \cdot \mu_l' \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, k).$$

1) vgl. [6]

Eine Variante der oben dargestellten Vorgehensweise erhält man, wenn man in (1.2-1) statt der Dichtefunktionen die charakteristischen Funktionen betrachtet[1]:

Die charakteristische Funktion von f (x) sei gegeben durch

$$(1.2.7a) \qquad \phi_f(t) = \int_{x \in D} e^{itx} f(x)\,dx = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_j \frac{(i\,t)^j}{j!}\right),$$

wobei $\varkappa_j$ die j-te Kumulante von f (x) sei und für jedes j existieren möge; ferner sei die charakteristische Funktion von g (x) gegeben durch

$$(1.2\text{-}7b) \qquad \phi_g(t) = \int_{x \in D} e^{itx} g(x)\,dx = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \frac{(i\,t)^j}{j!}\right),$$

wobei η_j die j-te Kumulante von g (x) sei und für jedes j existiere.

Aus (1.2-7) erhält man

$$(1.2\text{-}8) \qquad \phi_f(t) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} (\varkappa_j - \eta_j) \frac{(i\,t)^j}{j!}\right) \phi_g(t).$$

Existiert zu (1.2-7b) die inverse Fouriertransformation

$$(1.2\text{-}9) \qquad g(x) = \int_{t \in D^*} e^{-i\,t\,x} \phi_g(t)\,dt$$

und darf man Differentiation und Integration vertauschen[2], so erhält man

$$(1.2\text{-}10) \qquad \left(-\frac{d}{dx}\right)^j \left[g(x)\right] = \int_{t \in D^*} (i\,t)^j e^{-itx} \phi_g(t)\,dt.$$

---

1) vgl. [2], S 26 ff

2) vgl. [6]

Aus (1.2-8) erhält man mittels der inversen Fourier-transformation und durch Entwicklung des Ausdrucks

(1.2-11) $$\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}(\varkappa_j - \eta_j)\,\frac{(i\,t)^j}{j\,!}\right)$$

(1.2-12) $$f(x) = \int_{t\in D^*} e^{-itx}\,\phi_f\,(t)\,dt$$

$$= \int_{t\in D^*} \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}(\varkappa_j - \eta_j)\,\frac{(i\,t)^j}{j\,!}\right) e^{-itx}\,\phi_g\,(t)\,dt$$

$$= \int_{t\in D^*} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(i\,t)^k\right) e^{-itx}\,\phi_g\,(t)\,dt$$

und somit - wegen (1.2-1o) -

(1.2-13a) $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,\left(-\frac{d}{dx}\right)^k\left[g\,(x)\right]$$

bzw.

(1.2-13b) $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,.\,q_k\,(x)\,.\,g\,(x)\quad,$$

wobei

(1.2-13c) $$q_k\,(x) = \frac{1}{g(x)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^k\left[g\,(x)\right]$$

gesetzt wurde.

Die Koeffizienten a_k erhält man somit durch Entwicklung des Ausdrucks (1.2-11) und die $q_k\,(x)$ mit Hilfe der Formel (1.2-13c).

Dabei ist anzumerken, daß Formel (1.2-13c) i.a. kein System von orthogonalen Polynomen liefert.

Einen Spezialfall betrachten wir in Beispiel [1.2-B2].

Sowohl bei dem Ansatz (1.2-1) mit den Dichtefunktionen, als auch bei dem Ansatz (1.2-8) bzw. (1.2-13b) mit Hilfe der charakteristischen Funktionen ist zu beachten, daß das Integral über f(x) auf gewissen Teilintervallen des betrachteten Definitionsbereichs negative Beiträge ("negative Wahrscheinlichkeiten") liefern kann.

Unter der Annahme, daß

(1.2-14) $\varkappa_j = 0 \quad \text{für} \quad j \geq 5 \ ,$

untersuchten BARTON und DENNIS die (spezielle) GRAM-CHARLIER-Reihe

(1.2-15) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \varkappa_3 H_3(x)/6 + \varkappa_4 H_4(x)/24\right)$

und die (spezielle) EDGEWORTH-Reihe

(1.2-16) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \varkappa_3 H_3(x)/6 + (3\varkappa_4 H_4(x) + \varkappa_3^2 H_6(x))/72\right)$

auf Zonen in der durch

(1.2-17a) $\beta_1 = \mu_3^2 / \mu_2^3$

und

(1.2-17b) $\beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$

aufgespannten Ebene, in denen diese Reihen positiv definit bzw. unimodal sind[1].

Bzgl. der Darstellung (1.2-15) gegenüber (1.2-B1-11b) vergleiche man die Umrechnungsformeln von Momenten in Kumulanten (siehe Anhang A 1).

---

1) vgl. 2 , S. 26 f und 9 .

Im Zusammenhang mit den sich bei Reihenentwicklungen bei den Berechnungen manchmal ergebenden negativen Intervallbeiträgen ("negativen Wahrscheinlichkeiten") ist noch folgender Ansatz erwähnenswert:

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cdot \exp\left(-\sum_{j=0}^{k} b_j H_j(x)\right), \tag{1.2-18}$$

wobei es sich auch hier bei den $H_j(x)$ um die Hermiteschen Polynome handelt. Dieser Ansatz gewährleistet für jedes k, daß keine "negativen Wahrscheinlichkeiten" auftreten können.

Die Reihenentwicklung (1.2-18) ist unter dem Namen CHARLIER-Reihe vom Typ C bekannt.

Beispiel [1.2 - B1]: Die HERMITEschen Polynome

Zur Vereinfachung für das folgende setzen wir voraus, daß die durch f(x) gegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung den Mittelwert Null habe, d.h. es gelte

(1.2-B1-1) $$\mu_1' = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = 0.$$

Als Belegungsfunktion wählen wir (vgl. Tabelle [1.2 - T1])

(1.2-B1-2) $$g(x) = \exp(-x^2/2) \quad \text{für} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Aus (1.2-3) und Tabelle [1.2-T1] erhält man dann

(1.2-B1-3) $$q_i(x) = H_i(x) = \frac{1}{g(x)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^i \left[g(x)\right],$$

wobei in (1.2-3)

(1.2-B1-4) $$a_i = (-1)^i$$

gesetzt wurde.

Einsetzen von (1.2-B1-2) in (1.2-B1-3) ergibt

(1.2-B1-5a) $$H_i(x) = \sum_{l=0}^{i} (-1)^l \frac{i^{[2l]}}{2^l \cdot l!} x^{i-2l},$$

wobei

(1.2-B1-5b) $$i^{[k]} := \begin{cases} i\,(j-1)\,\ldots\,(i-k+1) & \text{für } k < i \\ 1 & \text{für } k = i \\ 0 & \text{für } k > i. \end{cases}$$

Es gilt (vgl. (1.2-2))

(1.2-B1-6) $$\int_{-\infty}^{+\infty} H_i(x)\, H_j(x)\, g(x)\, dx = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq j \\ j! \text{ für } i = j. \end{cases}$$

Aus (1.2-B1-5) erhält man die ersten 6 HERMITEschen Polynome

(1.2-B1-7)
$$
\begin{aligned}
H_0(x) &= 1 \\
H_1(x) &= x \\
H_2(x) &= x^2 - 1 \\
H_3(x) &= x^3 - 3x \\
H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3 \\
H_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x .
\end{aligned}
$$

Für die Koeffizienten c_i in (1.2-1) erhält man wegen (1.2-6c) und (1.2-B1-5)

(1.2-B1-8a)
$$c_i = \frac{1}{i!} \sum_{l=0}^{i} (-1)^l \frac{i!}{2^l \cdot l!} \mu_{i-2l} ,$$

wobei wir vereinbaren, daß

(1.2-B1-8b)
$$\mu_{i-2l} = 0 \quad \text{für} \quad i < 2l .$$

Für die ersten 6 Koeffizienten c_i ergeben sich dann in dem von uns betrachteten Koordinatensystem mit Mittelwert im Ursprung speziell die Werte

(1.2-B1-9)
$$
\begin{aligned}
c_0 &= 1 \\
c_1 &= 0 \\
c_2 &= \frac{1}{2} (\mu_2 - 1) \\
c_3 &= \frac{1}{6} \mu_3 \\
c_4 &= \frac{1}{24} (\mu_4 - 6\mu_2 + 3) \\
c_5 &= \frac{1}{120} (\mu_5 - 10\mu_3) .
\end{aligned}
$$

Somit erhält man für (1.2-1)

$$(1.2\text{-B1-1o})\quad f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \Big[1 + \tfrac{1}{2}(\mu_2 - 1) \cdot H_2(x) + \tfrac{1}{6}\mu_3 H_3(x) + \tfrac{1}{24}(\mu_4 - 6\mu_2 + 3) \cdot H_4(x) + \tfrac{1}{120}(\mu_5 - 10\mu_3) H_5(x) + \ldots\Big].$$

Liegt f (x) in standardisierter Form vor, d.h. gilt

$$(1.2\text{-B1-11a})\quad \mu_2 = 1\ ,$$

dann vereinfacht sich (1.2-B1-1o) zu

$$(1.2\text{-B1-11b})\quad f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \Big[1 + \tfrac{1}{6}\mu_3 H_3(x) + \tfrac{1}{24}(\mu_4 - 3) H_4(x) + \tfrac{1}{120}(\mu_5 - 10\mu_3) H_5(x) + \ldots\Big].$$

Die Reihe (1.2-B1-11b) bezeichnet man als "GRAM-CHARLIER-Reihe vom Typ A".

Beispiel [1.2 - B2]: Die EDGEWORTH-Reihe

Sei

(1.2-B2-1) $g(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

Ferner wollen wir annehmen, daß bzgl. f(x) gilt

(1.2-B2-2a) $\mu_1' = \int\limits_{x \in D} x\, f(x)\, dx = 0$

und

(1.2-B2-2b) $\mu_2 = \int\limits_{x \in D} (x-\mu_1')^2\, f(x)\, dx = 1$,

was sich durch eine geeignete Koordinatentransformation immer erreichen läßt.

Wegen (1.2-B2-1), (1.2-13c) und (1.2-B1-3) erhält man für die $q_k(x)$ in (1.2-13b) die HERMITEschen Polynome, d.h. es gilt (vgl. 1.2-B1-5))

(1.2-B2-3) $q_k(x) = H_k(x) = \sum\limits_{l=0}^{k} (-1)^l \frac{k^{[2l]}}{2^l\, l!}\, x^{k-2l}$

Die Koeffizienten a_k in (1.2-13b) erhält man durch Entwicklung von (1.2-11) unter Berücksichtigung von (1.2-B2-2) und daß für die Kumulanten der durch (1.2-B2-1) gegebenen Normalverteilung gilt

(1.2-B2-4a) $\eta_1 = 0$,

(1.2-B2-4B) $\eta_2 = 1$

und

(1.2-B2-4c) $\eta_j = 0$ für $j \geq 3$.

Somit erhält man speziell

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_1 &= 0, \\
a_2 &= 0, \\
a_3 &= \frac{\varkappa_3}{6}, \\
a_4 &= \frac{\varkappa_4}{24}, \\
a_5 &= \frac{\varkappa_5}{120}, \\
a_6 &= \frac{\varkappa_6 + 10\,\varkappa_3^2}{720}
\end{aligned}
\qquad \text{(1.2-B2-5)}
$$

Diese Reihenentwicklung ist unter dem Namen EDGEWORTH-Reihe bekannt.

Man beachte, daß diese Reihe mit der in Beispiel [1.2-B1] dargestellten GRAM-CHARLIER-Reihe vom Typ A nur dann - bis auf Umordnungen - identisch ist, wenn beide Reihen gleichmäßig konvergieren.

1.3 Systeme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die durch eine Differentialgleichung definiert sind

Bei den in 1.1 und 1.2 dargestellten Ansätzen ging es im wesentlichen darum, eine vorgegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung auf eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zurückzuführen, mit der man gut arbeiten kann. Ein System von Wahrscheinlichkeitsverteilungen wurde somit dadurch definiert, daß sich alle Verteilungen eines solchen Systems auf die gleiche Art auf eine bestimmte Verteilung abbilden lassen, mit der man dann arbeitet.

Im Gegensatz dazu wird bei dem nun darzustellenden Ansatz ein System von Verteilungen anhand gewisser gemeinsamer Eigenschaften der einzelnen Mitglieder des Systems definiert. Die Verteilung, mit der man dann arbeiten will, wird anhand zusätzlicher Eigenschaften aus dem betrachteten System ausgewählt.

So haben z.B. viele der "gängigen" Dichtefunktionen gemeinsam die Eigenschaften, daß sie unimodal sind und sich an den Rändern ihres Definitionsbereichs gut an die Abszissenachse anschmiegen. Man kann zeigen, daß viele dieser Funktionen der folgenden Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{(x-m) \cdot f(x)}{g(x)} \qquad (1.3\text{-}1)$$

genügen; hierbei sind die Konstante m (Modalwert) und die Funktion g(x) in Abhängigkeit von der vorgegebenen Dichtefunktion f(x) geeignet zu wählen.

Umgekehrt kann man auch m und g(x) vorgeben und versuchen, für die Differentialgleichung (1.3-1) eine Lösung f(x) zu finden, die die Eigenschaft hat, Dichtefunktion zu sein.

Denkt man sich dabei g(x) in eine Reihe um den Nullpunkt entwickelt

(1.3-2) $$g(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i \, x^i \quad ,$$

wobei k endlich oder unendlich sein kann - bzw. setzt man für g(x) das durch (1.3-2) gegebene Polynom an -, so ist die etwaige Lösung f(x) von (1.3-1) abhängig von den Parametern m, b_0, b_1, b_2, ...

Dieser Ansatz geht auf K. PEARSON (vgl. [1]) zurück und wird von uns für die spezielle Annahme

(1.3-3) $$g(x) = b_0 + b_1 \, x + b_2 \, x^2$$

ausführlich in Kapitel 2 dargestellt werden (eigentliches PEARSON-System).

Ein ähnlicher Ansatz stammt von BURR[1)], der statt der Dichtefunktionen f(x) Verteilungsfunktionen F(x) betrachtet.

Die Funktionen F(x) des Systems von BURR sind dadurch definiert, daß sie Lösungen einer Differentialgleichung der Form

(1.3-4) $$\frac{d}{dx} F(x) = A\,(F(x)) \cdot g(x)$$

sind.

Je nach Wahl von A(F) und g(x) erhält man unterschiedliche Systeme von Verteilungsfunktionen.

---

1) vgl. [2], S. 43 f und [10].

Wählt man

(1.3-5) $A(F) = 1 - F$,

so erhält man u.a. die folgenden Verteilungen :

(1.3-6a) Exponentialverteilung $F(x) = e^{-x}$ für $x \geq 0$,

(1.3-6b) WEIBULL-Verteilung $F(x) = bx^{b-1} e^{-x^b}$ für $x \geq 0$

und

(1.3-6c) PARETO-Verteilung $F(x) = bx^{-b-1}$ für $x \geq 1$.

Die Funktion g(x) ist jeweils geeignet zu wählen.

2. Das PEARSON-System[1)]

Unsere weiteren Überlegungen werden sich auf das PEARSONsche System von Dichtefunktionen beschränken: Das PEARSON-System ist eine 4-Parameter-Familie von Dichtefunktionen, die alle einer bestimmten Differentialgleichung genügen (vgl. (1.3-1), (1.3-2)). In 2.1 werden wir uns mit dem Ansatz befassen, der zu diesem System führt, und in 2.2 und 2.3 werden wir dann die einzelnen Haupttypen bzw. Spezialtypen dieses Systems herleiten.

Die nachfolgenden Betrachtungen dieses Kapitels lehnen sich z.T. eng an eine entsprechende Darstellung in [1] an.

---

1) vgl. [1]

2.1 Ansatz

Wie wir bereits in 1.3 erwähnt haben, ist das PEARSONsche System von Dichtefunktionen dadurch charakterisiert, daß die einzelnen Dichtefunktionen $y = f(x)$ einer Differentialgleichung (DGL) 1. Ordnung der Form

(2.1-1a) $$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cdot (x + a)}{g(x)}$$ (Bezeichnung: PEARSONsche DGL (im weiteren Sinne))

genügen, wobei die Konstante a und die Funktion g(x) geeignet zu wählen sind.

Die Funktion g(x) denke man sich in eine Reihe um $x = 0$ entwickelt, d.h.

(2.1-1b) $$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \, x^i \; .$$

Dann sind bei vorgegebenem $y = f(x)$ die Parameter a, b_0, b_1, b_2, b_3, ... geeignet zu wählen.

Andererseits kann man jedoch auch (2.1-1a) mit vorgegebenen Werten für a, b_0, b_1, b_2, ... betrachten und versuchen, zu einer bestimmten Wertekombination eine Dichtefunktion $y = f(x)$ zu finden.

Doch kehren wir zunächst zu dem Fall zurück, daß $y = f(x)$ vorgegeben ist und es darum geht, die Parameter a, b_0, b_1, b_2, ... zu bestimmen.

Durch Umformung von (2.1-1a) erhält man

(2.1-2a) $$(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) \frac{dy}{dx} = y \cdot (x + a).$$

Multipliziert man beide Seiten von (2.1-2a) mit x^n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) und integriert bzgl. x, so ergibt sich - mit durch den Definitionsbereich von $y = f(x)$ bestimmten Integrationsgrenzen x_A und x_E -

(2.1-2b)
$$\int_{x_A}^{x_E} x^n \, (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) \cdot \frac{dy}{dx} \, dx$$
$$= \int_{x_A}^{x_E} x^n \, (x + a) \cdot f(x) \, dx$$

und somit durch partielle Integration

(2.1-2c)
$$\left[x^n \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) \cdot f(x) \right]_{x_A}^{x_E}$$
$$- \int_{x_A}^{x_E} (n \, b_0 x^{n-1} + (n+1) \, b_1 x^n + (n+2) \, b_2 x^{n+1} + \ldots) \, f(x) \, dx$$
$$= \int_{x_A}^{x_E} (x^{n+1} + a \, x^n) \, f(x) \, dx.$$

Wenn für die betrachtete Funktion $y = f(x)$ gilt, daß der Ausdruck

(2.1-3a)
$$x^n \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) \cdot f(x)$$

für beliebiges n an den Integrationsgrenzen x_A und x_E verschwindet und ferner für beliebiges n das n-te Moment

(2.1-3b)
$$\mu_n' = \int_{x_A}^{x_E} x^n \, f(x) \, dx$$

existiert - man beachte, daß $y = f(x)$ Dichtefunktion sein

soll -, dann erhält man aus (2.1-2c) die Gleichungen

(2.1-4) $$a\mu'_n + n\, b_0 \mu'_{n-1} + (n+1)\, b_1 \mu'_n + (n+2)\, b_2 \mu'_{n+1} + \ldots = -\mu'_{n+1}$$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Dieses Gleichungssystem spiegelt die (i.a. eineindeutigen) Beziehungen zwischen den Parametern der betrachteten Differentialgleichung (2.1-1) und den Momenten der jeweils betrachteten Verteilung wider.

Das eigentliche PEARSONsche System von Dichtefunktionen ist dadurch definiert, daß in (2.1-1b) gilt, daß

(2.1-5a) $$b_i = 0 \quad \text{für} \quad i \geq 3,$$

d.h., daß

(2.1-5b) $$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \; ;$$

bei unseren weiteren Oberlegungen gehen wir somit von der (eigentlichen) PEARSONschen DGL

(2.1-5c) $$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+a)\,.\,y}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

aus.

In diesem Fall reduziert sich das Gleichungssystem (2.1-4) zu dem Gleichungssystem

(2.1-5d)

$$
\begin{aligned}
\mu_0' a \quad &+ \mu_0' b_1 + 2\mu_1' b_2 = -\mu_1' \\
\mu_1' a + \mu_0' b_0 &+ 2\mu_1' b_1 + 3\mu_2' b_2 = -\mu_2' \\
\mu_2' a + 2\mu_1' b_0 &+ 3\mu_2' b_1 + 4\mu_3' b_2 = -\mu_3' \\
\mu_3' a + 3\mu_2' b_0 &+ 4\mu_3' b_1 + 5\mu_4' b_2 = -\mu_4'
\end{aligned}
$$

Kennt man also die ersten vier Momente einer PEARSON-Verteilung, so lassen sich anhand von (2.1-5d) die Parameter a, b_0, b_1 und b_2 der PEARSONschen DGL (2.1-5c) i.a. eindeutig bestimmen. Die Gleichungen (2.1-5d) vereinfachen sich noch weiter, wenn man annimmt, daß der Mittelwert der durch $y = f(x)$ gegebenen Verteilung im Ursprung des betrachteten Koordinatensystems liegt, so daß statt der allgemeinen Momente μ_i' die zugehörigen zentralen Momente μ_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) vorliegen; dies läßt sich immer durch eine geeignete Koordinatentransformation erreichen. In diesem speziellen Koordinatensystem mit Mittelwert im Ursprung erhält man dann für die Parameter A, B_0, B_1 und B_2[1] folgende Lösungen:

(2.1-6a)

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\mu_3 (\mu_4 + 3\mu_2^2)}{10\mu_2\mu_4 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2} \\
B_0 &= \frac{-\mu_2(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2)}{10\mu_2\mu_4 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2} \\
B_1 &= -A = -\frac{\mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^2)}{10\mu_2\mu_4 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2} \\
B_2 &= -\frac{2\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2 - 6\mu_2^3}{10\mu_2\mu_4 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2} \quad .
\end{aligned}
$$

---

1) Um anzudeuten, daß wir das spezielle Koordinatensystem mit Mittelwert im Ursprung betrachten, wählen wir zur Bezeichnung der einzelnen Parameter der PEARSON-DGL große Buchstaben. Hierzu vgl. auch (2.1-14).

Setzt man

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

(2.1-6b)

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad ,$$

so ergibt sich aus (2.1-6a)

$$A = \text{sign}\,(\mu_3)\,\frac{\sqrt{\mu_2}\,\sqrt{\beta_1}\,(\beta_2 + 3)}{2\,(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}$$

$$B_0 = -\,\frac{\mu_2\,(4\beta_2 - 3\beta_1)}{2\,(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}$$

(2.1-6c)

$$B_1 = -\,A = -\,\text{sign}\,(\mu_3)\,\frac{\sqrt{\mu_2}\,\sqrt{\beta_1}\,(\beta_2 + 3)}{2\,(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}$$

$$B_2 = \frac{3\beta_1 - 2\beta_2 + 6}{2\,(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)} \quad .$$

Nun wollen wir uns dem umgekehrten Fall zuwenden und versuchen, zu vorgegebenen Parameterwerten für a, b_0, b_1 und b_2 eine Lösung $y = f(x)$ der PEARSONschen DGL

(2.1-7)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+a)\,y}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

zu finden. Dabei haben wir zu beachten, daß $y = f(x)$ eine Dichtefunktion sein soll, d.h. daß gelten soll

(2.1-8a) $\quad f(x) \geq 0 \quad$ für $\quad x \in \langle x_A, x_E \rangle$

und

(2.1-8b)

$$\int_{x_A}^{x_E} f(x)\,dx = 1 \quad .$$

Zudem ist zu beachten (vgl. (2.1-2)), daß $y = f(x)$ (2.1-3a) erfüllen soll, d.h. daß gilt

(2.1-8c) $$\left[x^n \, (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) \, . \, f(x)\right]_{x_A}^{x_E} = 0.$$

Der Definitionsbereich $\langle x_A, x_E \rangle$ [1] von $y = f(x)$ ist diesbezüglich geeignet zu bestimmen.

Diese Randbedingungen lassen es plausibel erscheinen, daß man nicht zu jeder Wertekombination der Parameter a, b_0, b_1 und b_2 eine Lösung von (2.1-7) finden kann.

Aus (2.1-7) erhalten wir durch Separation

(2.1-9a) $$\frac{dy}{y} = \frac{x + a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \, . \, dx \, .$$

Integration von (2.1-9a) ergibt

(2.1-9b) $$\ln y = \int r(x) \, dx + \text{Const.}$$

mit

(2.1-9c) $$r(x) = \frac{x + a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \, .$$

Das Integral auf der rechten Seite von (2.1-9b) läßt sich mittels Partialbruchzerlegung lösen.

Wie wir in 2.2 noch zeigen werden, unterscheiden wir drei Haupttypen von PEARSON-Funktionen, die sich wie folgt in

---

1) Um offen zu lassen, ob dieser Definitionsbereich offen, abgeschlossen oder halb offen / halb abgeschlossen ist, wurde die Schreibweise "$\langle x_A, x_E \rangle$" gewählt.

unserem speziellen Koordinatensystem mit Mittelwert im Ursprung definieren lassen.

Bezeichnen wir die Nullstellen von r(x) gem. (2.1-9c) in diesem speziellen Koordinatensystem mit

(2.1-10a) $$X_1 = -\frac{B_1}{2B_2} + \sqrt{\frac{B_1^2 - 4\,B_0\,B_2}{4\,B_2^2}}$$

und

(2.1-10b) $$X_2 = -\frac{B_1}{2B_2} - \sqrt{\frac{B_1^2 - 4\,B_0\,B_2}{4\,B_2^2}}\,,$$

so sind diese drei Haupttypen dadurch definiert, daß

(2.1-11a) X_1 und X_2 reell sind und verschiedenes Vorzeichen haben (PEARSON-Haupttyp I),

bzw.

(2.1-11b) X_1 und X_2 konjugiert komplex sind (PEARSON-Haupttyp II),

bzw.

(2.1-11c) X_1 und X_2 reell sind und gleiches Vorzeichen haben (PEARSON-Haupttyp III).

Dabei wurde vorausgesetzt, daß $B_2 \neq 0$ ist. Der Fall $B_2 = 0$ führt zu einem der Spezialtypen des PEARSON-Systems, die wir in 2.3 behandeln werden.

Definiert man

(2.1-12a) $$\varkappa = \frac{B_1^2}{4B_0 B_2}$$

bzw. (vgl. (2.1-6c))

(2.1-12b) $$\varkappa = -\frac{\beta_1(\beta_2 + 3)^2}{4(4\beta_2 - 3\beta_1)(3\beta_1 - 2\beta_2 + 6)},$$

so lassen sich die in (2.1-11) angesprochenen Sachverhalte durch die folgenden Wertebereiche von $\varkappa$ charakterisieren[1]:

(2.1-13a) $\varkappa < 0$ (entspricht (2.1-11a)) (Haupttyp I)

bzw.

(2.1-13b) $0 < \varkappa < 1$ (entspricht (2.1-11b)) (Haupttyp II)

bzw.

(2.1-13c) $\varkappa > 1$ (entspricht (2.1-11c)) (Haupttyp III).

Wir werden nun in 2.2 und 2.3 die einzelnen Haupttypen bzw. Spezialtypen des PEARSON-Systems herleiten. Dabei wird sich u.a. auch zeigen, daß es im PEARSON-System nicht nur Kurven mit den in 1.3 erwähnten Eigenschaften, nämlich Unimodalität und gutes Anschmiegen der Kurven an die Abszissenachse an den Rändern ihres Definitionsbereichs gibt, sondern auch Kurven, die J-förmig bzw. U-förmig sind.

---

1) In einem bel. Koordinatensystem ist $\varkappa$ zu definieren durch

$$\varkappa = \frac{b_1^2 + 4\mu_1' b_1 b_2 + 4\mu_1'^2 b_2^2}{4 b_0 b_2 + 4\mu_1' b_1 b_2 + 4\mu_1'^2 b_2^2}$$

Von Nutzen für unsere weiteren Oberlegungen werden uns folgende Transformationsformeln zwischen den Parametern a, b_0, b_1, b_2 der PEARSON-DGL (2.1-7) in einem beliebigen Koordinatensystem und den Parametern A, B_0, B_1, B_2 dieser DGL in dem durch die Transformation

(2.1-14a) $$X = \frac{x - m}{c}$$

definierten Koordinatensystem sein:

(2.1-14b)
$$A = \frac{a + m}{c}$$
$$B_0 = \frac{1}{c^2}(b_0 + b_1 m + b_2 m^2)$$
$$B_1 = \frac{1}{c}(b_1 + 2m\, b_2)$$
$$B_2 = b_2$$

bzw.

(2.1-14c)
$$a = c\, A - m$$
$$b_0 = c^2\, B_0 - c\, m\, B_1 + m^2\, B_2$$
$$b_1 = c\, B_1 - 2\, m\, B_2$$
$$b_2 = B_2$$

Aus (2.1-14b) bzw. (2.1-14c) folgt

(2.1-14d) $$B_1^2 - 4\, B_0\, B_2 = (b_1^2 - 4\, b_0\, b_2) \cdot \frac{1}{c^2}\,.$$

Bei der Darstellung der einzelnen Typen des PEARSON-Systems in 2.2 und 2.3 haben wir folgende Vorgehensweise gewählt: Zunächst wird gesagt, wie der jeweilige PEARSON-Typ definiert ist. Dann wird mit Hilfe von (2.1-9) für ein beliebiges Koordinatensystem die jeweilige Dichtefunktion in Abhängigkeit von den Parametern der PEARSONschen DGL (2.1-9a) hergeleitet, die, wie wir anhand von (2.1-5d) gesehen haben, i.a. eineindeutig mit den ersten vier Momenten - in dem vorgegebenen, beliebigen Koordinatensystem - zusammenhängen. Anschließend werden wir von Fall zu Fall auf einige wichtige Beziehungen zwischen den einzelnen Parametern der jeweiligen Dichtefunktion und den Parametern der PEARSONschen DGL hinweisen und diese z.T. auch mathematisch beweisen.

Bei den PEARSONschen Haupttypen in 2.2 werden wir ferner angeben, wie die zentralen Momente dieser Verteilungen von den jeweiligen Verteilungsparametern abhängen. Anhand dieser Beziehungen wird es uns dann möglich sein, Bestimmungsgleichungen für die Parameter der jeweiligen Verteilung in Abhängigkeit von den zentralen Momenten anzugeben. Dieses sind die in [1] angegebenen "klassischen" Formeln für die Parameter der jeweiligen PEARSON-Verteilung, die somit aus den direkten Beziehungen zwischen den (zentralen) Momenten und den Verteilungsparametern und nicht auf dem Umweg über die Zusammenhänge mit den Parametern der PEARSONschen DGL gewonnen werden.

Nicht nur bei den Haupttypen in 2.2, sondern auch bei den übrigen Typen des PEARSON-Systems in 2.3 werden wir dann noch gegebenenfalls darauf aufmerksam machen, wenn eine besonders bekannte theoretische Verteilung einem solchen PEARSON-Typ zuzuordnen ist.

Anschließend wird dann zu jedem Typ noch - mindestens - ein Beispiel mit Zeichnung gegeben.

2.2 Herleitung der Haupttypen des PEARSON-Systems

2.2.1 Der PEARSON-Haupttyp I (PEARSON-Typ 1)

Sei

(2.2.1-1) $\mathcal{R} < 0$ (vgl. (2.1-12)).

Partialbruchzerlegung von r(x) gem. (2.1-9c) - in einem beliebigen Koordinatensystem - ergibt

(2.2.1-2a) $$r(x) = \frac{s_2}{x - x_2} - \frac{s_1}{x_1 - x} ,$$

wobei

(2.2.1-2b) $$s_1 = \frac{x_1 + a}{b_2 (x_1 - x_2)}$$

und

(2.2.1-2c) $$s_2 = - \frac{x_2 + a}{b_2 (x_1 - x_2)}$$

und mit x_1 und x_2 die (reellwertigen) Nullstellen des Nenners von r(x) bezeichnet seien[1].

Integration von (2.1-9a) ergibt dann

(2.2.1-3a) $$\ln y = s_2 \ln (x - x_2) + s_1 \ln (x_1 - x) + \text{Const.}$$

und somit erhält man als Lösung von (2.1-7)

---

1) Geht man zu dem speziellen Koordinatensystem mit Mittelwert im Ursprung über, so haben diese beiden Nullstellen x_1 und x_2 unterschiedliches Vorzeichen. Ferner beachte man, daß x_1 und x_2 so definiert wurden, daß in jedem betrachteten Koordinatensystem $x_1 > x_2$ gilt; vgl. (2.1-10) und (2.1-14).

(2.2.1-4a) $$y = \begin{cases} y^{*} \quad (x - x_2)^{s_2} \, (x_1 - x)^{s_1} & \text{für } x \in \langle x_2, x_1 \rangle \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases} ,$$

wobei

(2.2.1-4b) $$x_1 = - \frac{b_1}{2\, b_2} + \sqrt{\frac{b_1^2 - 4\, b_0\, b_2}{4\, b_2^2}} ,$$

(2.2.1-4c) $$x_2 = - \frac{b_1}{2\, b_2} - \sqrt{\frac{b_1^2 - 4\, b_0\, b_2}{4\, b_2^2}} ,$$

(2.2.1-4d) $$s_1 = \frac{x_1 + a}{b_2\,(x_1 - x_2)} ,$$

(2.2.1-4e) $$s_2 = - \frac{x_2 + a}{b_2\,(x_1 - x_2)}$$

und

(2.2.1-4f) $$y^{*} = \frac{\Gamma(s_1 + s_2 + 2)}{\Gamma(s_1 + 1)\,\Gamma(s_2 + 1)} \cdot \frac{1}{(x_1 - x_2)^{s_1 + s_2 + 1}} .$$

Zu den Intervallgrenzen ist folgendes anzumerken:

(2.2.1-5) Falls $s_2 \geq 0$, so ist das links abgeschlossene Intervall $[x_2, x_1\rangle$, falls $s_2 < 0$, so ist das links offene Intervall $(x_2, x_1\rangle$ zu betrachten.

Analoges gilt für den rechten Intervallrand.

Die Intervallgrenzen ergeben sich wegen (2.1-8).

Die Nomierungskonstante y^* gem. (2.2.1-4f) ergibt sich wegen (2.1-8b), d.h.

(2.2.1-6)
$$1 \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$= \int_{x_2}^{x_1} y^* (x - x_2)^{s_2} (x_1 - x)^{s_1}\,dx$$

$$= y^* (x_1 - x_2)^{s_1 + s_2 + 1} \int_0^1 z^{s_2} (1 - z)^{s_1}\,dz$$

(hierbei Transformation: $z = \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2}$)

$$= y^* (x_1 - x_2)^{s_1 + s_2 + 1} \cdot B(s_2 + 1, s_1 + 1)$$

$$= y^* (x_1 - x_2)^{s_1 + s_2 + 1} \cdot \frac{\Gamma(s_1 + 1)\,\Gamma(s_2 + 1)}{\Gamma(s_1 + s_2 + 2)} \quad .$$

Bezgl. der in dieser Formel auftretenden Betafunktion $B(x,y)$ bzw. Gammafunktion $\Gamma(x)$ vergleiche man Anhang A 3.

Man beachte, daß s_1, s_2 und y^* gem. (2.2.1-4d,e,f) bzgl. einer Koordinatentransformation des Typs $X = x + d$ invariant sind (vgl. (2.1-14)).

Zwischen den Parametern von $y = f(x)$ gem. (2.2.1-4a) und den Parametern der PEARSON-DGL gem. (2.1-7) gelten folgende Beziehungen:

(2.2.1-7a)
$$s_1 / (x_1 + a) = - s_2 / (x_2 + a)\ ,$$

(2.2.1-7b) $s_1 + s_2 = \frac{1}{b_2}$,

(2.2.1-7c) $s_1 > -1$

und

(2.2.1-7d) $s_2 > -1$.

Wegen (2.2.1-7c,d) ist dann unmittelbar einzusehen, daß (2.1-8c) erfüllt ist.

Die Beziehungen (2.2.1-7a,b) erhält man unmittelbar aus (2.2.1-4).

Zum Beweis von (2.2.1-7c) genügt es, unsere Betrachtungen in dem speziellen Koordinatensystem mit Mittelwert im Ursprung durchzuführen.

Wegen (2.2.1-1) gilt (vgl. (2.1-12))

(2.2.1-8a) $B_0 \cdot B_2 < 0$

bzw. wegen (2.1-6c)

(2.2.1-8b) $$-\frac{\mu_2 (4\beta_2 - 3\beta_1)(3\beta_1 - 2\beta_2 + 6)}{4(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)^2} < 0 .$$

Wegen

(2.2.1-9a) $\mu_2 > 0$,

(2.2.1-9b) $(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)^2 > 0$

und

(2.2.1-9c) $(4\beta_2 - 3\beta_1) > 0$

ergibt sich somit im Fall von Typ 1

(2.2.1-9d) $3\beta_1 - 2\beta_2 + 6 > 0$.

Dabei gilt (2.2.1-9c) wegen

(2.2.1-10a) $4\beta_2 - 3\beta_1 > 4\beta_2 - 4\beta_1 - 4 = 4\,(\beta_2 - \beta_1 - 1) > 0$;

Zum Beweis von

(2.2.1-10b) $\beta_2 - \beta_1 - 1 > 0$

vergleiche man [34], S. 49 ff

Wegen (2.2.1-9d) und (2.2.1-10b) gilt

(2.2.1-11) $\frac{1}{B_2}\,(1 + 2\,B_2) > 0$,

wie man durch Einsetzen von (2.1-6c) in (2.2.1-11) leicht zeigen kann.

Wegen (2.2.1-1) gilt außerdem (vgl. 2.2.1-4b)

(2.2.1-12a) $\frac{B_1}{2\,B_2} < \sqrt{\frac{B_1^2 - 4\,B_0\,B_2}{4\,B_2^2}}$

und deshalb mit (2.2.1-11)

(2.2.1-12b) $-\frac{B_1}{2\,B_2} \cdot \frac{1}{B_2}\,(1 + 2\,B_2) > -\left(\frac{1}{B_2} + 2\right)\sqrt{\frac{B_1^2 - 4\,B_0\,B_2}{4\,B_2^2}}$

bzw.

(2.2.1-12c) $$\frac{1}{B_2}\left(-\frac{B_1}{2\,B_2}+\sqrt{\frac{B_1^2-4\,B_0\,B_2}{4\,B_2^2}}-B_1\right)>-2\sqrt{\frac{B_1^2-4\,B_0\,B_2}{4\,B_2^2}}$$

bzw. wegen (2.2.1-4b,c,d,e) und (2.1-14)

(2.2.1-12d) $$S_1=\frac{X_1+A}{B_2\,(x_1-x_2)}=s_1=\frac{x_1+a}{b_2\,(x_1-x_2)}>-1 \quad \text{(w.z.b.w.)}.$$

Die Beziehung (2.2.1-7d) ergibt sich auf analoge Weise.

Die Momente des betrachteten PEARSON-Typs in Abhängigkeit von seinen Parametern x_1, x_2, s_1 und s_2 gem. (2.2.1-4b,c,d,e) erhält man in folgender Weise:

Analog zu (2.2.1-6) ergeben sich die ersten vier Momente der durch (2.2.1-4) gegebenen PEARSON-Verteilung vom Haupttyp I bzgl. der Achse parallel zur y-Achse durch $x = x_2$, die wir mit $\mu_i'(x_2)$ $(i = 1, 2, \ldots, 4)$ bezeichnen wollen, anhand von

(2.2.1-13)
$$\begin{aligned}\mu_i'(x_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty}(x-x_2)^i\,f(x)\,dx\\ &= \int_{x_2}^{x_1}(x-x_2)^i\,y^*\,(x-x_2)^{s_2}\,(x_1-x)^{s_1}\,dx\\ &= y^*\,(x_1-x_2)^{s_1+s_2+i+1}\cdot B\,(s_2+i+1,s_1+1)\\ &= y^*\,(x_1-x_2)^{s_1+s_2+i+1}\cdot\frac{\Gamma(s_1+1)\,\Gamma(s_2+i+1)}{\Gamma(s_1+s_2+i+2)}\,.\end{aligned}$$

Wegen

(2.2.1-14) $$\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$$

und mit (2.2.1-4f) erhält man die ersten vier Momente bzgl. $x = x_2$

(2.2.1-15a) $\mu_1'(x_2) = (x_1-x_2)\,\frac{s_2+1}{s_1+s_2+2}$,

(2.2.1-15b) $\mu_2'(x_2) = (x_1-x_2)^2\,\frac{(s_2+1)(s_2+2)}{(s_1+s_2+2)(s_1+s_2+3)}$,

(2.2.1-15c) $\mu_3'(x_2) = (x_1-x_2)^3\,\frac{(s_2+1)(s_2+2)(s_2+3)}{(s_1+s_2+2)(s_1+s_2+3)(s_1+s_2+4)}$

und

(2.2.1-15d) $\mu_4'(x_2) = (x_1-x_2)^4\,\frac{(s_2+1)(s_2+2)(s_2+3)(s_2+4)}{(s_1+s_2+2)(s_1+s_2+3)(s_1+s_2+4)(s_1+s_2+5)}$.

Setzt man

(2.2.1-16a) $s_1' = s_1 + 1$,

(2.2.1-16b) $s_2' = s_2 + 1$,

(2.2.1-16c) $r = s_1 + s_2 + 2$

und

(2.2.1-16d) $\mathcal{E} = (s_1 + 1)(s_2 + 1)$,

so erhält man mittels der Transformationsformel für Momente (vgl. Anhang A 1) für die zentralen Momente μ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) nach Umformung die Beziehungen

(2.2.1-17a) $\mu_1 = 0$,

2.2.1-17b) $\mu_2 = (x_1-x_2)^2\,\frac{s_1' \cdot s_2'}{r^2\,(r+1)}$.

(2.2.1-17c) $$\mu_3 = (x_1-x_2)^3 \frac{2s_1's_2'(s_1'-s_2')}{r^3(r+1)(r+2)}$$

und

(2.2.1-17d) $$\mu_4 = (x_1-x_2)^4 \frac{3s_1's_2'(s_1's_2'(r-6)+2r^2)}{r^4(r+1)(r+2)(r+3)} \quad .$$

Anhand der oben entwickelten Formeln wollen wir nun die "klassischen" Bestimmungsgleichungen für die Parameter des betrachteten PEARSON-Haupttyps I herleiten, die sich auf unser spezielles Koordinatensystem mit Mittelwert im Ursprung beziehen:

Mit (2.2.1-16) und (2.2.1-17) erhält man für β_1 und β_2 gem. (2.1-6b)

(2.2.1-18a) $$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{4(r^2-4\varepsilon)(r+1)}{\varepsilon(r+2)^2}$$

und

(2.2.1-18b) $$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{3(r+1)(2r^2+\varepsilon(r-6))}{\varepsilon(r+2)(r+3)} \quad .$$

Aus (2.2.1-18a,b) erhält man

(2.2.1-19a) $$\frac{\beta_1(r+2)^2}{4(r+1)} = \frac{r^2}{\varepsilon} - 4$$

und

(2.2.1-19b) $$\frac{\beta_2(r+2)(r+3)}{3(r+1)} = \frac{2r^2}{\varepsilon} + r - 6 \quad .$$

Eliminiert man in (2.2.1-19) den Ausdruck $\frac{r^2}{\varepsilon}$, so erhält man

(2.2.1-2o) $$\frac{\beta_1 (r+2)^2}{2(r+1)} - \frac{\beta_2 (r+2)(r+3)}{3(r+1)} = -(r+2) .$$

Aus (2.2.1-2o) und (2.2.1-19b) ergeben sich

(2.2.1-21a) $$r = \frac{6(\beta_2 - \beta_1 - 1)}{3\beta_1 - 2\beta_2 + 6}$$

und

(2.2.1-21b) $$\varepsilon = \frac{4r^2 (r+1)}{16(r+1) + \beta_1 (r+2)^2} .$$

Aus (2.2.1-17b) ergibt sich

(2.2.1-22a) $$d = x_1 - x_2 = \sqrt{\frac{\mu_2 (r+1) r^2}{\varepsilon}}$$

bzw. wegen (2.2.1-21b)

(2.2.1-22b) $$d = \frac{1}{2}\sqrt{\mu_2 (16(r+1) + \beta_1 (r+2)^2)} .$$

Aus

(2.2.1-23a) $$s_1 + s_2 = r - 2 \quad \text{(vgl. (2.2.1-16c))}$$

und

$$(2.2.1\text{-}23b)\quad s_1 - s_2 = \operatorname{sign}(\mu_3)\sqrt{(s_1' + s_2')^2 - 4s_1's_2'}$$

$$= \operatorname{sign}(\mu_3)\sqrt{r^2 - 4\varepsilon}$$

$$= \operatorname{sign}(\mu_3)\, r\,(r+2)\cdot\sqrt{\frac{\beta_1}{16(r+1) + \beta_1(r+2)^2}}$$

(vgl. (2.21-16,17,21))

erhält man

$$(2.2.1\text{-}24a)\quad s_1 = S_1 = \tfrac{1}{2}\left(r-2+\operatorname{sign}(\mu_3)\, r\,(r+2)\sqrt{\frac{\beta_1}{16\,(r+1) + \beta_1\,(r+2)^2}}\right)$$

und

$$(2.2.1\text{-}24b)\quad s_2 = S_2 = \tfrac{1}{2}\left(r-2-\operatorname{sign}(\mu_3)\, r\,(r+2)\sqrt{\frac{\beta_1}{16\,(r+1) + \beta_1\,(r+2)^2}}\right)$$

In unserem speziellen Koordinatensystem mit Mittelwert im Ursprung gilt (vgl. (2.1-6c))

$$(2.2.1\text{-}25)\quad A = -B_1 \ ,$$

so daß man mit Hilfe von (2.2.1-4) in unserem speziellen Koordinatensystem die Beziehung

$$(2.2.1\text{-}26)\quad (s_1 + 1) / X_1 = -(s_2 + 1) / X_2$$

erhält, wobei wir mit X_1 und X_2 die Nullstellen des Nenners von R(x) gem. (2.1-9c) bezeichnen.

Aus (2.2.1-22) und (2.2.1-26) erhält man

(2.2.1-27a) $$X_1 = \frac{d\,(s_1 + 1)}{s_1 + s_2 + 2}$$

und

(2.2.1-27b) $$X_2 = -\frac{d\,(s_2 + 1)}{s_1 + s_2 + 2}$$

bzw. für die Nullstellen des Nenners von r(x) gem. (2.1-9c) in einem beliebigen Koordinatensystem

(2.2.1-28a) $$x_1 = X_1 + \mu_1'$$

und

(2.2.1-28b) $$x_2 = X_2 + \mu_1' \,.$$

Die Formeln (2.2.1-27a,b), (2.2.1-24a,b), (2.2.1-21a), (2.2.1-22b) und (2.2.1-4f) sind die "klassischen Formeln für die Parameter des PEARSON-Haupttyps I (vgl. [1], S. 51 ff).[1)]

Beim PEARSON-Haupttyp I unterscheiden wir drei Arten von Kurven, und zwar (vgl. (2.2.1-4))

(i) unimodale Kurven, die durch

(2.2.1-29a) $$s_1 > 0 \text{ und } s_2 > 0$$

definiert sind (PEARSON-Haupttyp I (im engeren Sinn)),

(ii) J-förmige Kurven, die durch

---

1) Hierbei sei nochmals darauf verwiesen, daß diese Formeln aus den direkten Beziehungen zwischen den ersten vier (zentralen) Momenten und den Verteilungsparametern - vgl. (2.2.1-15) und (2.2.1-17) - hergeleitet wurden, während die Formeln (2.2.1-4) auf dem Umweg über die Parameter der PEARSONschen DGL (2.1-7) ermittelt wurden.

(2.2.1-29b) ($s_1 > 0$ und $s_2 < 0$) bzw. ($s_1 < 0$ und $s_2 > 0$)

definiert sind (PEARSON-Haupttyp I (J)),

und

(iii) U-förmige Kurven, die durch

(2.2.1-29c) $s_1 < 0$ und $s_2 < 0$

definiert sind (PEARSON-Haupttyp I (U)).

Die Funktionen des PEARSON-Haupttyps I sind bekannter unter dem Namen BETA-Verteilungen. Oblicherweise schreibt man für die Dichtefunktion einer BETA-Verteilung[1]:

(2.2.1-30a) $$f(x) = \frac{1}{B(p,q)} \frac{(x - a)^{p - 1} (b - x)^{q - 1}}{(b - a)^{p + q - 1}}$$

mit

(2.2.1-30b) $p > 0$, $q > 0$ und $a \leq x \leq b$.

---

1) vgl. [13], 2, S. 37 ff

B E I S P I E L E

Beispiel [2.2.1-B1]: PEARSON-Haupttyp I

Gegeben seien folgende Werte für die zentralen Momente:

$$(2.2.1\text{-}B1\text{-}1)\quad \begin{aligned} \mu_1 &= 0, \\ \mu_2 &= 1, \\ \mu_3 &= 1, \\ \mu_4 &= 4. \end{aligned}$$

Dann erhält man

$$(2.2.1\text{-}B1\text{-}2)\quad \begin{aligned} A &= 0{,}7, \\ B_0 &= -1{,}3, \\ B_1 &= -0{,}7, \\ B_2 &= 0{,}1, \end{aligned}$$

sowie

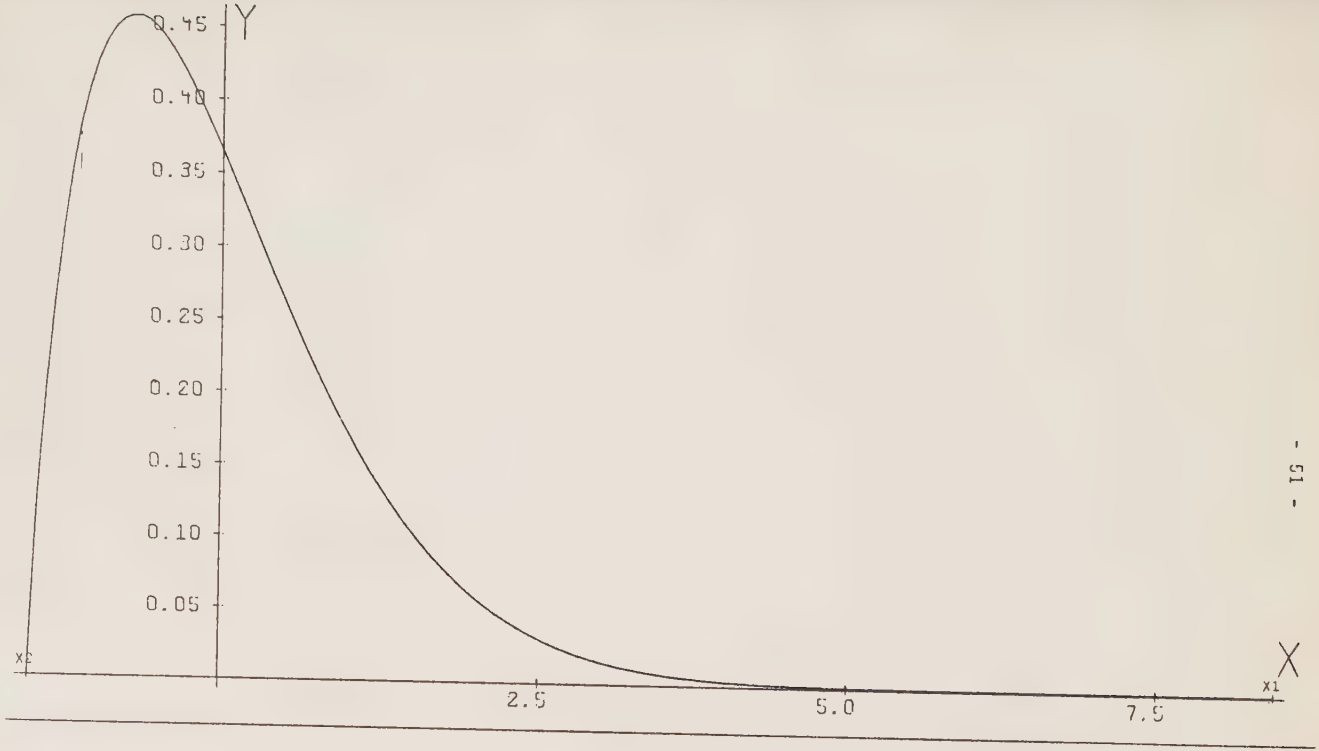
$$(2.2.1\text{-}B1\text{-}3)\quad \varkappa = -0{,}942$$

und somit die Dichtefunktion

$$(2.2.1\text{-}B1\text{-}4)\quad y = 7{,}41 \cdot 10^{-10} (x + 1{,}52)^{0{,}82} (8{,}52 - x)^{9{,}18}$$

$$\text{für } x \in [-1{,}52,\ 8{,}52] .$$

Hierzu vergleiche man nachstehende Zeichnung [2.2.1-Z1].



Zeichnung [2.2.1-Z1]

PEARSØNTYP 1 (HAUPTTYP I)

Beispiel [2.2.1-B2]: PEARSON-Haupttyp I (J)

Gegeben seien folgende Werte für die zentralen Momente:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0, \\ \mu_2 &= 1, \\ \mu_3 &= \sqrt{0{,}9} = 0{,}949, \\ \mu_4 &= 3. \end{aligned} \qquad \text{(2.2.1-B2-1)}$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned} A &= 4{,}74 \\ B_0 &= -7{,}75 \\ B_1 &= -4{,}74 \\ B_2 &= 2{,}25 \end{aligned} \qquad \text{(2.2.1-B2-2)}$$

sowie

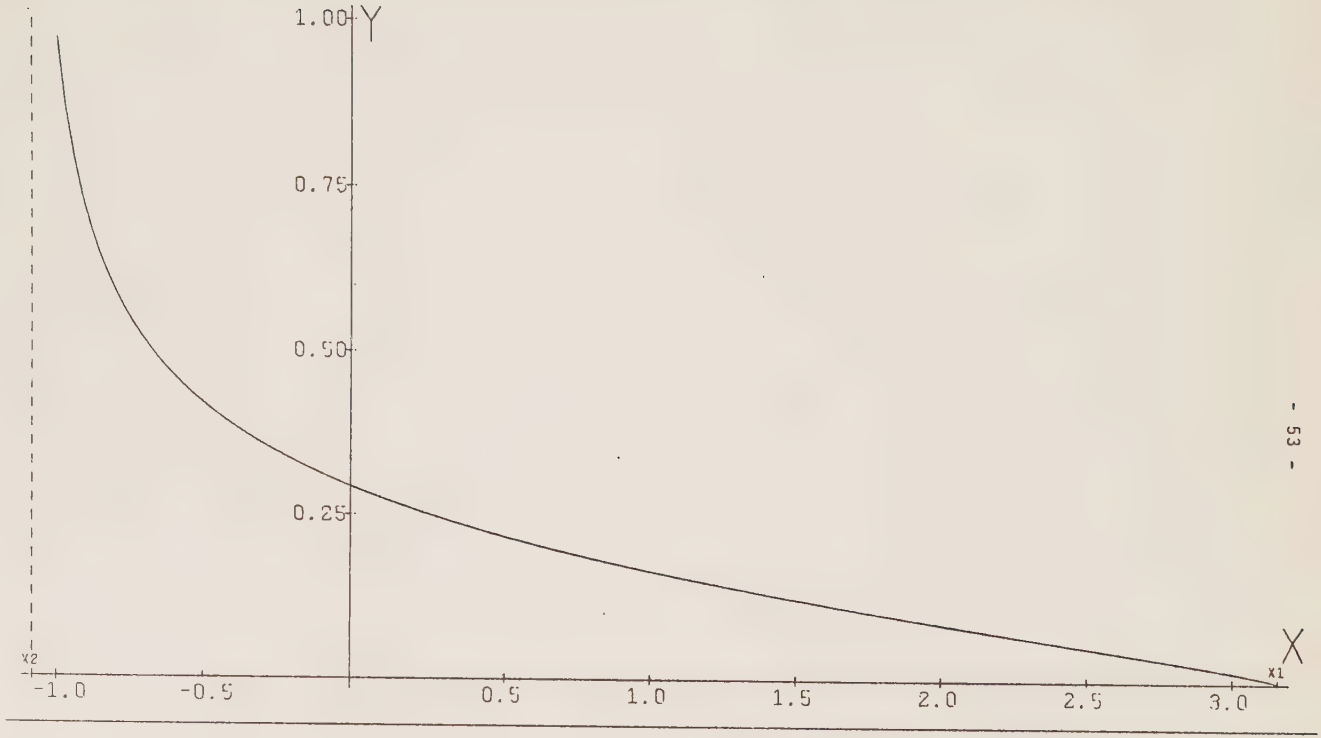
$$\varkappa = -0{,}323 \qquad \text{(2.2.1-B2-3)}$$

und somit die Dichtefunktion

$$y = 0{,}116 \cdot (x + 1{,}08)^{-0{,}38} \, (3{,}19 - x)^{0{,}83} \qquad \text{(2.2.1-B2-4)}$$

$$\text{für } x \in (-1{,}08,\ 3{,}19] \ .$$

Hierzu vergleiche man nachstehende Zeichnung [2.2.1-Z2].



Zeichnung [2.2.1-Z2]

PEARSONTYP 1 (HAUPTTYP I)

Beispiel [2.2.1-B3]: PEARSON-Haupttyp I (U)

Gegeben seien folgende Werte für die zentralen Momente:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0, \\ \mu_2 &= 1, \\ \mu_3 &= \sqrt{0,6} = 0,775, \\ \mu_4 &= 2. \end{aligned} \qquad \text{(2.2.1-B3-1)}$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned} A &= -0,74, \\ B_0 &= 1,19, \\ B_1 &= 0,74, \\ B_2 &= -0,73 \end{aligned} \qquad \text{(2.2.1-B3-2)}$$

sowie

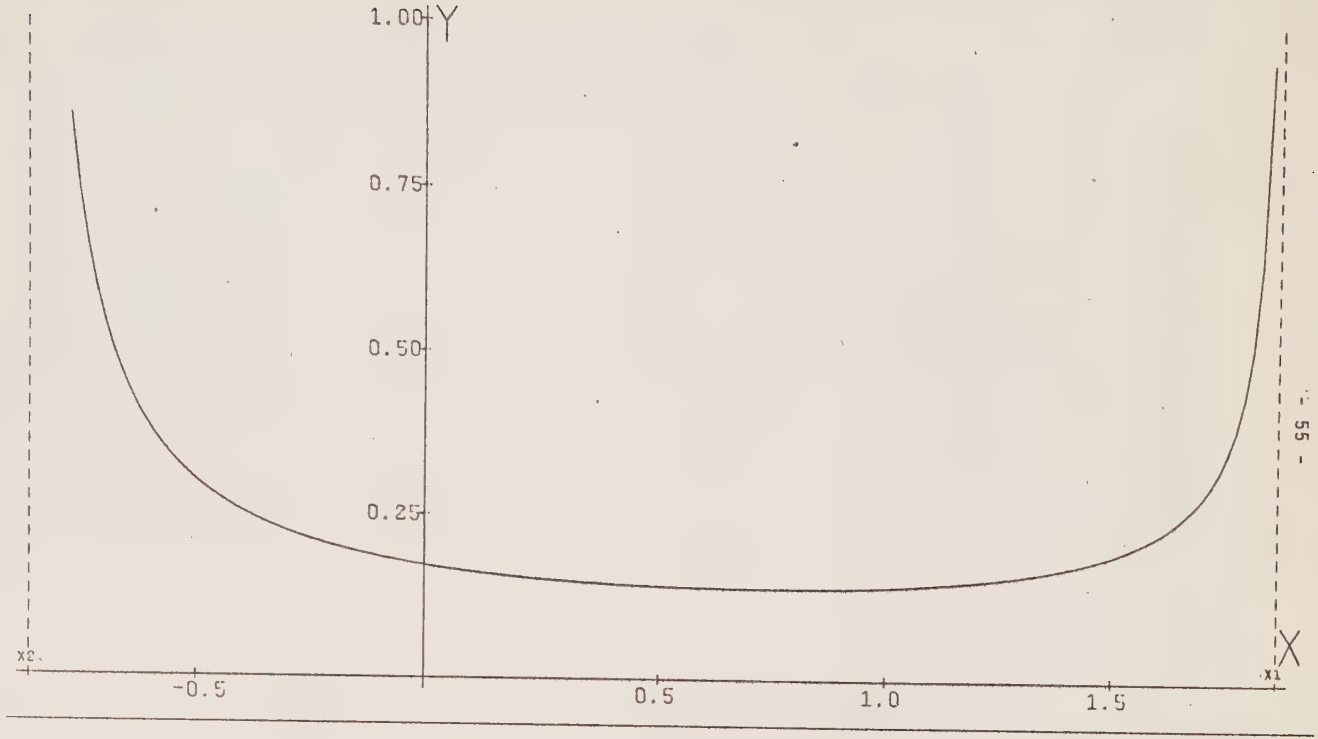
$$\mathcal{H} = -0,159 \qquad \text{(2.2.1-B3-3)}$$

und somit die Dichtefunktion

$$y = 0,218 \cdot (x + 0,87)^{-0,80} (1,88 - x)^{-0,57} \qquad \text{(2.2.1-B3-4)}$$

für $x \in (-0,87, 1,88)$.

Hierzu vergleiche man nachstehende Zeichnung [2.2.1-Z3].



Zeichnung [2.2.1-Z3]

PEARSØNTYP 1 (HAUPTTYP I)

2.2.2 Der PEARSON-Haupttyp II (PEARSON-Typ 4)

Sei

(2.2.2-1) $0 < \varkappa < 1$ (vgl. (2.1-12)).

Dann sind die Nullstellen des Nenners von r(x) gem. (2.1-9c) - in einem beliebigen Koordinatensystem - konjugiert komplex, und es gilt

(2.2.2-2a) $$x_1 = -\frac{b_1}{2b_2} + i\sqrt{\frac{4b_0\,b_2 - b_1^2}{4b_2^2}}$$

und

(2.2.2-2b) $$x_2 = -\frac{b_1}{2b_2} - i\sqrt{\frac{4b_0\,b_2 - b_1^2}{4b_2^2}} \quad .$$

Setzt man

(2.2.2-3a) $$r = -\frac{b_1}{2b_2} \quad ,$$

(2.2.2-3b) $$c = a + r = a - \frac{b_1}{2b_2} \quad ,$$

(2.2.2-3c) $$q = \sqrt{\frac{4b_0\,b_2 - b_1^2}{4b_2^2}}$$

und

(2.2.2-3d) $$X = x - r,$$

so erhält man für r(x) gem. (2.1-9c)

(2.2.2-4) $$r(x) = r\,(X + r) = \frac{X + c}{b_2\,(X^2 + q^2)} \quad .$$

Für (2.1-9b) ergibt sich dann

$$(2.2.2\text{-}5)\quad \ln y = \int \frac{X + c}{b_2\,(X^2 + q^2)}\,dX + \text{Const}$$

$$= \frac{1}{2b_2}\,\ln (X^2 + q^2) + \frac{c}{q \cdot b_2} \arctan (X/q) + \text{Const}\ ,$$

und man erhält als Lösung von (2.1-9a) im ursprünglichen (beliebigen) Koordinatensystem

$$(2.2.2\text{-}6a)\quad y = y^{*}\,((x-r)^2 + q^2)^{-s} \exp\left(-\tilde{\nu}\cdot \arctan\left(\frac{x-r}{q}\right)\right)$$

für $x \in (-\infty, \infty)$,

wobei

$$(2.2.2\text{-}6b)\quad r = -\frac{b_1}{2b_2}\ ,$$

$$(2.2.2\text{-}6c)\quad q = \sqrt{\frac{4\,b_0\,b_2 - b_1^2}{4b_2^2}}\ ,$$

$$(2.2.2\text{-}6d)\quad s = -\frac{1}{2b_2}\ ,$$

$$(2.2.2\text{-}6e)\quad \tilde{\nu} = -\frac{c}{b_2 \cdot q} = -\frac{a + r}{b_2 \cdot q} \qquad \text{(vgl. (2.2.2-3b))}$$

und

$$(2.2.2\text{-}6f)\quad y^{*} = q^{\,v+1} \exp\left(\frac{\tilde{\nu}\cdot\tilde{\pi}}{2}\right) \cdot \frac{1}{H\,(v,\tilde{\nu})}$$

mit

$$(2.2.2\text{-}6g)\quad v = 2s - 2$$

und

$$(2.2.2\text{-}6h)\quad H\,(v,\tilde{\nu}) = \int_0^{\tilde{\pi}} (\sin\alpha)^{v} \cdot \exp\,(\tilde{\nu}\cdot\alpha)\,d\alpha .$$

Es läßt sich leicht verifizieren, daß (2.1-8a) erfüllt ist. Die Normierungskonstante y^* gem. (2.2.2-6f) ergibt sich wegen (2.1-8b) in folgender Weise:

(2.2.2-7)
$$1 \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y^* \left((x-r)^2+q^2\right)^{-s} \exp\left(-\nu \cdot \arctan\left(\frac{x-r}{q}\right)\right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y^* q^{-2s} \left((X/q)^2+1\right)^{-s} \exp\left(-\nu \cdot \arctan(X/q)\right) dX$$

(Transformation: $X = x - r$)

$$= \int_{-\tilde{\pi}/2}^{\tilde{\pi}/2} y^* q^{-2s} (\tan^2\beta + 1)^{-s} \exp(-\nu \cdot \beta) \frac{q}{\cos^2\beta}\, d\beta$$

(Transformation: $X/q = \tan\beta$)

$$= \int_{-\tilde{\pi}/2}^{\tilde{\pi}/2} y^* q^{-2s+1} (\cos\beta)^{2s-2} \exp(-\nu \cdot \beta)\, d\beta$$

$$= \int_{0}^{\tilde{\pi}} y^* q^{-(\nu+1)} (\sin\alpha)^{\nu} \exp\left(-\nu\left(\tfrac{1}{2}\tilde{\pi} - \alpha\right)\right) d\alpha$$

(Transformation: $\alpha = \frac{1}{2}\tilde{\pi} - \beta$)

$$= y^* q^{-(\nu+1)} \exp\left(-\tfrac{1}{2}\nu\tilde{\pi}\right) \cdot H(\nu, \nu).$$

Für die ersten vier zentralen Momente der betrachteten Verteilung vom PEARSON-Haupttyp II in Abhängigkeit von ihren durch (2.2.2-6) gegebenen Parametern erhält man

(2.2.2-8a) $\mu_1 = 0,$

(2.2.2-8b) $\mu_2 = \dfrac{q^2 (\nu^2 + \nu^2)}{\nu^2 (\nu - 1)}$ (existiert, falls $s > \frac{3}{2}$)

(2.2.2-8c) $\mu_3 = -\dfrac{4 q^3 \nu (\nu^2 + \nu^2)}{\nu^3 (\nu - 1)(\nu - 2)}$ (existiert, falls $s > 2$)

und

(2.2.2-8d) $$\mu_4 = \frac{3\, q^4 (v^2 + \nu^2)((v + 6)(v^2 + \nu^2) - 8\, v^2)}{v^4\, (v - 1)(v - 2)(v - 3)}$$

(existiert, falls $s > \frac{5}{2}$)

(Zur Herleitung dieser Formeln vergleiche man [1], S. 64ff).

Setzt man voraus, daß die ersten vier Momente existieren, so gilt

(2.2.2-9) $s > \frac{5}{2}$ (vgl. (2.2.2-6d,8)).

Mit Hilfe von (2.2.2-9) läßt sich dann leicht zeigen, daß (2.1-8c) erfüllt ist.

Setzt man die Formeln (2.2.2-8) für die zentralen Momente in die Bestimmungsgleichungen (2.1-6c) für β_1 und β_2 ein, so erhält man die Gleichungen

(2.2.2-10a) $$-\frac{\beta_1\, (v - 2)^2}{2\, (v - 1)} = \frac{8\, v^2}{z} - 8$$

und

(2.2.2-10b) $$\frac{\beta_2\, (v - 2)\, (v - 3)}{3\, (v - 1)} = v + 6 - \frac{8\, v^2}{z} \quad ,$$

wobei

(2.2.2-10c) $$z = v^2 + \nu^2$$

gesetzt wurde.

Auflösen von (2.2.2-10) nach v und z ergibt

(2.2.2-11a) $$\nu = \frac{6\,(\beta_2 - \beta_1 - 1)}{2\,\beta_2 - 3\,\beta_1 - 6}$$

und

(2.2.2-11b) $$z = \frac{16\,(\nu - 1)\,.\,\nu^2}{16\,(\nu - 1) - \beta_1\,(\nu - 2)^2} \quad .$$

Für die Parameter unserer durch (2.2.2-6a) gegebenen Verteilung vom PEARSON-Haupttyp II erhalten wir dann (vgl. [1], S. 58 ff) - in einem beliebigen Koordinatensystem - die somit anhand der direkten Beziehungen (2.2.2-8) zwischen den (zentralen) Momenten und den Verteilungsparametern hergeleiteten "klassischen" Formeln

(2.2.2-12b) $$s = \frac{1}{2}\,(\nu + 2),$$

(2.2.2-12b) $$\mathfrak{d} = -\,\mathrm{sign}\,(\mu_3)\,\frac{\nu\,(\nu - 2)\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{16\,(\nu - 1) - \beta_1\,(\nu - 2)^2}} \quad ,$$

(2.2.2-12c) $$q = \sqrt{\frac{\mu_2}{16}\,(16\,(\nu - 1) - \beta_1\,(\nu - 2)^2)}$$

und

(2.2.2-12d) $$r = \frac{\mathfrak{d}\,.\,q}{\nu} + \mu_1' \quad .$$

Die Normierungskonstante y^* ist nach wie vor anhand von (2.2.2-6f) zu bestimmen.

B E I S P I E L

Beispiel [2.2.2-B1]: Der PEARSON-Haupttyp II

Gegeben seien die zentralen Momente

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= 1 \\ \mu_3 &= \sqrt{0,4} = 0,632 \\ \mu_4 &= 4,4. \end{aligned} \qquad \text{(2.2.2-B1-1)}$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned} A &= 0,22 \\ B_0 &= -0,77 \\ B_1 &= -0,22 \\ B_2 &= -0,075 , \end{aligned} \qquad \text{(2.2.2-B1-2)}$$

sowie

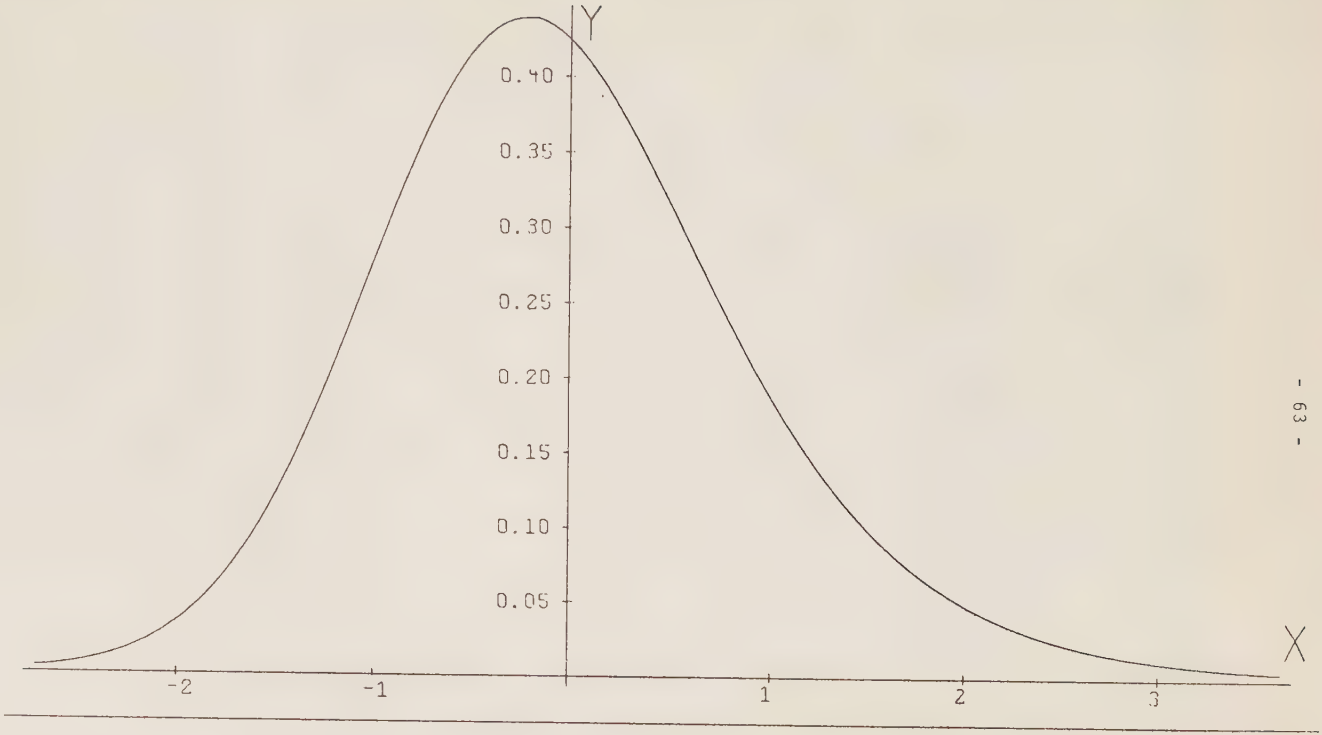
$$\varkappa = 0,21 \qquad \text{(2.2.2-B1-3)}$$

und somit die Dichtefunktion

$$y = 1,36 \cdot 10^5 \left((x + 1,46)^2 + 2,85^2\right)^{-6,62} \cdot \exp\left(-5,78 \cdot \arctan\left(\frac{x + 1,46}{2,85}\right)\right) \qquad \text{(2.2.2-B1-4)}$$

für $x \in (-\infty, \infty)$.

Hierzu vergleiche man nachstehende Zeichnung [2.2.2-Z1].



Zeichnung [2.2.2-Z1]

PEARSONTYP 4 (HAUPTTYP II)

2.2.3 Der PEARSON-Haupttyp III (PEARSON-Typ 6)

Sei

(2.2.3-1) $\mathfrak{Re} > 1$ (vgl. (2.1-12)).

Dann sind die Nullstellen X_1 und X_2 (vgl. (2.1-1o)) des Nenners von R(x) gem. (2.1-9c) im speziellen Koordinatensystem mit Mittelpunkt im Ursprung reell und haben gleiches Vorzeichen. Wir unterscheiden zwei Fälle.

2.2.3.1 Der PEARSON-Haupttyp III (R) (PEARSON-Typ 6 (R)[1])

Zusätzlich zu (2.2.3-1) gelte

(2.2.3.1-1a) $\mu_3 > 0$;

das hat zur Folge, daß für X_1, X_2 gem. (2.1-1o), wie wir im Anschluß noch zeigen werden, gilt

(2.2.3.1-1b) $X_1 < 0$

und

(2.2.3.1-1c) $X_2 < 0$.

Analog zu (2.2.1-2) bei Typ I erhält man für r(x) gem. (2.1-9c) in einem beliebigen Koordinatensystem die Partialbruchzerlegung

---

1) Das "R" wird zur Verdeutlichung hinzugefügt, um auszudrücken, daß die betrachtete Kurve rechtsschief ist (vgl. [11], S. 356ff).

(2.2.3.1-2) $$r(x) = \frac{s_1}{x - x_1} + \frac{s_2}{x - x_2} \quad .$$

Für (2.1-9b) ergibt sich

(2.2.3.1-3) $$\ln y = s_1 \ln (x - x_1) + s_2 \ln (x - x_2) + \text{Const}$$

und somit als Lösung von (2.1-9a)

(2.2.3.1-4a) $$y = \begin{cases} y_R^* \ (x - x_1)^{s_1} \ (x - x_2)^{s_2} & \text{für } x \in \langle x_1, \infty), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

(2.2.3.1-4b) $$x_1 = -\frac{b_1}{2\,b_2} + \sqrt{\frac{b_1^2 - 4\,b_0\,b_2}{4\,b_2^2}} \quad ,$$

(2.2.3.1-4c) $$x_2 = -\frac{b_1}{2\,b_2} - \sqrt{\frac{b_1^2 - 4\,b_0\,b_2}{4\,b_2^2}} \quad ,$$

(2.2.2.1-4d) $$s_1 = \frac{x_1 + a}{b_2\,(x_1 - x_2)} \quad ,$$

(2.2.3.1-4e) $$s_2 = -\frac{x_2 + a}{b_2\,(x_1 - x_2)}$$

und

(2.2.3.1-4f) $$y_R^* = \frac{\Gamma(-s_2)}{\Gamma(-(s_1+s_2+1))\ \Gamma(s_1+1)} \cdot \frac{1}{(x_1 - x_2)^{s_1+s_2+1}}$$

Bzgl. der linken Intervallgrenze bei x_1 gilt sinngemäß die bei Typ 1 gemachte Bemerkung (2.2.1-5).

Es ist unmittelbar einzusehen, daß (2.1-8a) erfüllt ist.

Die Normierungskonstante y_R^* gem. (2.2.3.1-4f) ergibt sich wegen (2.1-8b), d.h.

(2.2.3.1-5)
$$
\begin{aligned}
1 &\stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \\
&= \int_{x_1}^{\infty} y_R^* \,(x-x_1)^{s_1}\,(x-x_2)^{s_2}\,dx \\
&= \int_{x_1-x_2}^{\infty} y_R^* \,(x_1-x_2)^{s_1+s_2}\,(X/(x_1-x_2)-1)^{s_1}\cdot(X/(x_1-x_2))^{s_2}\,dX \\
&\qquad \text{(Transformation: } X = x-x_2\text{)} \\
&= \int_{1}^{0} y_R^* \,(x_1-x_2)^{s_1+s_2+1}\,(\tfrac{1}{z}-1)^{s_1}\,(\tfrac{1}{z})^{s_2}\,(-\tfrac{1}{z^2})\,dz \\
&\qquad \text{(Transformation: } \tfrac{1}{z} = \tfrac{X}{x_1-x_2}\text{)} \\
&= y_R^* \,(x_1-x_2)^{s_1+s_2+1} \int_0^1 (z-1)^{s_1}\, z^{-s_1-s_2-2}\,dz \\
&= y_R^* \,(x_1-x_2)^{s_1+s_2+1} \cdot B\,(-(s_1+s_2+1), s_1+1) \\
&= y_R^* \,(x_1-x_2)^{s_1+s_2+1} \cdot \frac{\Gamma(-(s_1+s_2+1))\cdot\Gamma(s_1+1)}{\Gamma(-s_2)}
\end{aligned}
$$

(vgl. Anhang A 3).

Analog zu (2.2.1-7) bei Typ 1 gelten hier die Beziehungen

(2.2.3.1-6a) $s_1/(x_1+a) = -s_2/(x_2+a)$,

(2.2.3.1-6b) $s_1 + s_2 = \frac{1}{b_2}$

und

(2.2.3.1-6c) $s_1 > -1.$

Statt (2.2.1-7d) gilt ferner

(2.2.3.1-6d) $s_1 + s_2 < -5.$

Beim Beweis von (2.2.3.1-6c) ist zu beachten, daß im speziellen Koordinatensystem mit Mittelwert im Ursprung wegen (2.2.3-1) gilt

(2.2.3.1-7a) $B_0 \cdot B_2 > 0$

bzw. wegen (2.1-6c)

(2.2.3.1-7b) $$-\frac{\mu_2 (4\beta_2-3\beta_1)(3\beta_1-2\beta_2+6)}{4(5\beta_2-6\beta_1-9)^2} > 0 ,$$

wodurch sich für Typ 6

(2.2.3.1-7c) $3\beta_1 - 2\beta_2 + 6 < 0$

ergibt.

Mit Hilfe von (2.2.3-1), (2.2.3.1-1a) und (2.2.3.1-7c) lassen sich außerdem (2.2.3.1-1b) und (2.2.3.1-1c) nachweisen.

Für die zentralen Momente μ_i der betrachteten Verteilung vom PEARSON-Haupttyp III (R) in Abhängigkeit von ihren durch (2.2.3.1-4) gegebenen Parametern erhält man die gleichen Ausdrücke wie beim PEARSON-Haupttyp I. Gleiches gilt für die sogen. "klassischen" Formeln für die Verteilungsparameter (vgl. (2.2.1-17) und [1], S. 70).

Bei der Momentenberechnung, die analog zu (2.2.3.1-5) erfolgt, ergibt sich, daß das i-te Moment (i = 0, 1, 2, ...) nur dann existiert, wenn

(2.2.3.1-8) $-s_1 - s_2 - 1 > i$.

Setzt man umgekehrt voraus, daß die ersten vier Momente der betrachteten Verteilung existieren, so ergibt sich (2.2.3.1-6d).

Mit Hilfe von (2.2.3.1-6d) ist dann leicht zu zeigen, daß (2.1-8c) erfüllt ist.

Wir unterscheiden

(i) Unimodale Kurven, die durch

(2.2.3.1-9a) $s_1 \geq 0$ (PEARSON-Haupttyp III (R) (im engeren Sinn))

definiert sind,
und

(ii) J-förmige Kurven, die durch

(2.2.3.1-9b) $s_1 < 0$ (PEARSON-Haupttyp III (R; J))

definiert sind.

Spezialfälle des betrachteten PEARSON-Haupttyps III sind die PARETO-Verteilung[1)] mit der Dichtefunktion

(2.2.3.1-10a) $f(x) = k \cdot x^{-\alpha}$

mit

(2.2.3.1-10b) $\alpha > 0$, $k > 0$ und $x \geq k$

---

1) vgl. [13], 1, S. 233ff

sowie die F-Verteilung[1] mit der Dichtefunktion

$$(2.2.3.1\text{-}11a)\quad f(x) = \frac{1}{B\left(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}\nu_1 - 1}}{(1+x)^{\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)}}$$

mit

$$(2.2.3.1\text{-}11b)\quad \nu_1 > 0,\ \nu_2 > 0,\quad x > 0.$$

---

1) vgl. [13], 2, S. 75ff

Beispiel [2.2.3.1-B1]: Der PEARSON-Haupttyp III (R)

Gegeben seien die zentralen Momente

(2.2.3.1-B1-1) $\mu_1 = 0$
$\mu_2 = 1$
$\mu_3 = \sqrt{1,5} = 1,22$
$\mu_4 = 5,6.$

Dann ergeben sich

(2.2.3.1-B1-2) $A = o,53$
$B_0 = - o,9o$
$B_1 = - o,53$
$B_2 = - o,o35$,

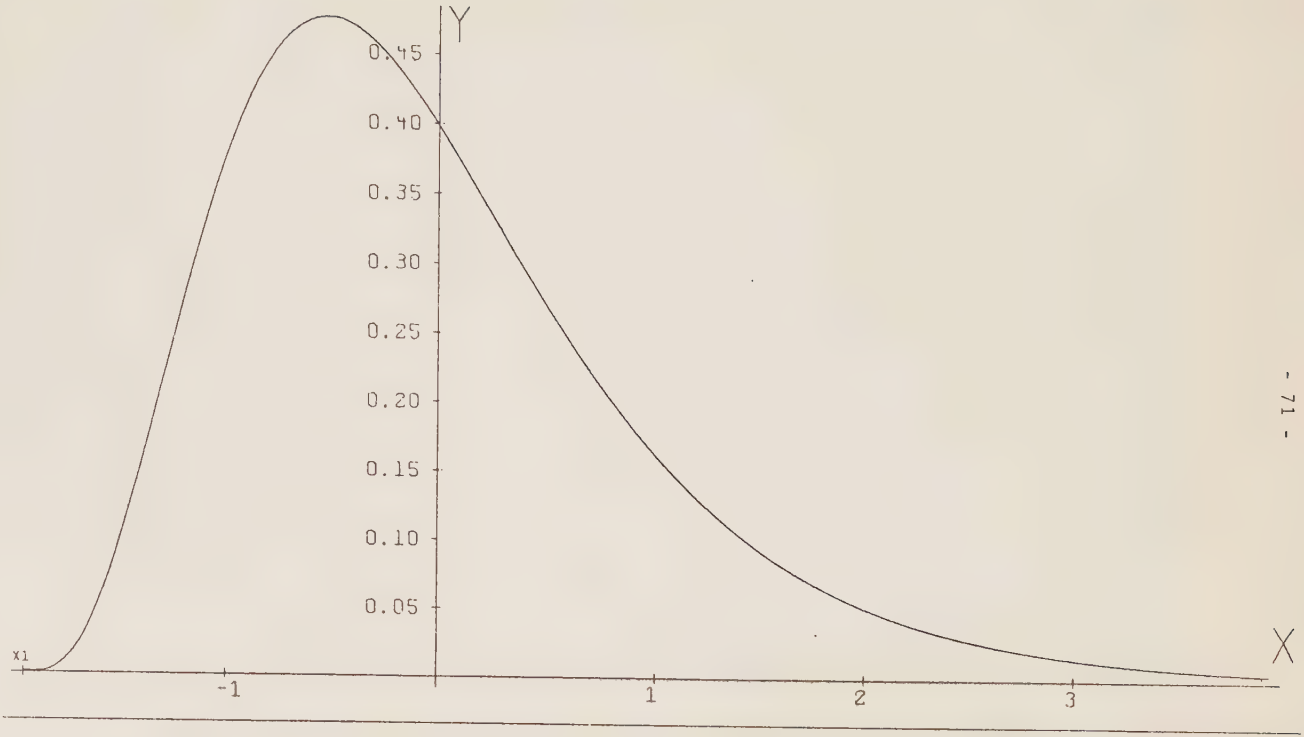
sowie

(2.2.3.1-B1-3) $\varkappa = 2,21$

und somit die Dichtefunktion

(2.2.3.1-B1-4) $f(x) = 3,47 \cdot 1o^{34} (x+1,95)^{3,66} (x+13,o9)^{-32,23}$
für $x \in [-1,95 , \infty)$.

Hierzu vergleiche man die nachstehende Zeichnung [2.2.3.1-Z1].



Zeichnung [2.2.3.1-Z1]

PEARSONTYP 6 (HAUPTTYP III)

Beispiel [2.2.3.1-B2]: Der PEARSON-Haupttyp III (R; J)

Gegeben seien

(2.2.3.1-B2-1) $A = 3$
$B_0 = -2$
$B_1 = -3$
$B_2 = -0{,}125.$

Dann erhält man

(2.2.3.1-B2-2) $\mu_1 = 0$
$\mu_2 = 3{,}2$
$\mu_3 = 38{,}4$
$\mu_4 = 972{,}8$,

sowie

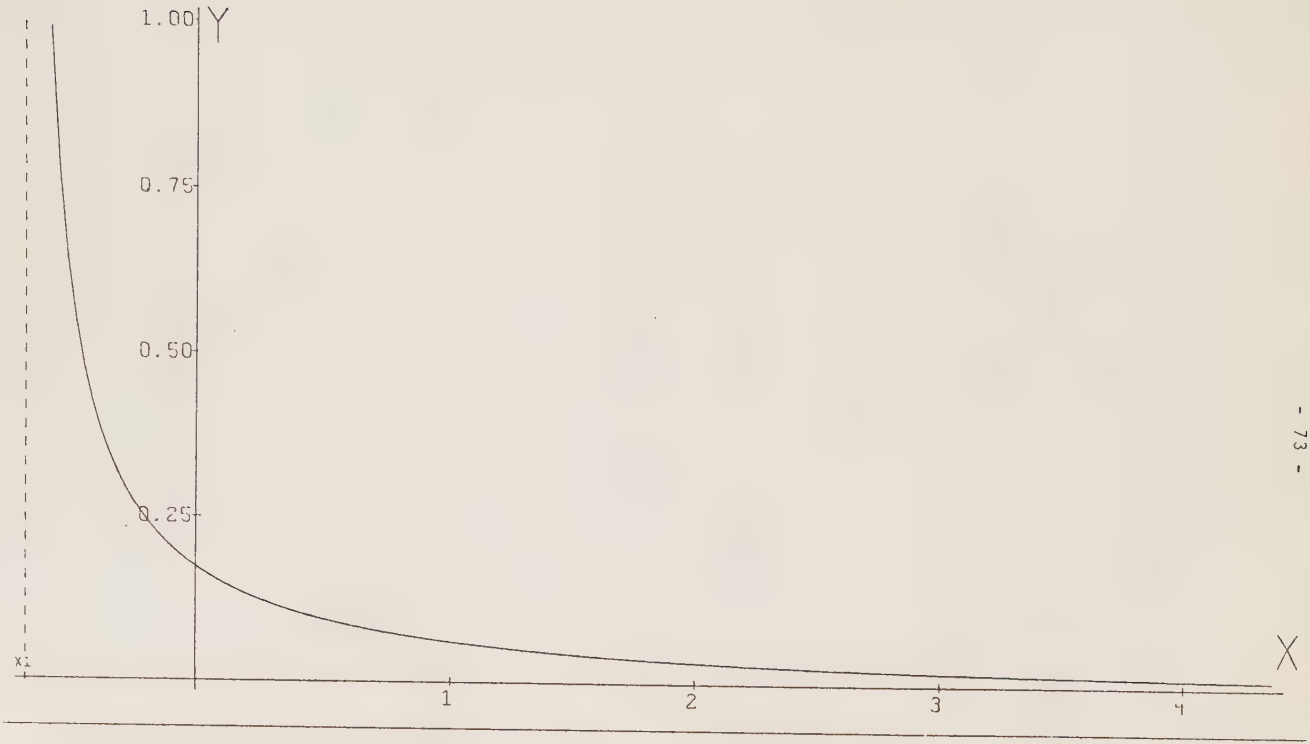
(2.2.3.1-B2-3) $\varkappa = 9{,}0$

und somit die Dichtefunktion

(2.2.3.1-B2-4) $f(x) = 8{,}44 \cdot 10^{8} \, (x+0{,}686)^{-0{,}82} \cdot (x+23{,}31)^{-7{,}18}$

für $x \in (-0{,}686 \, , \infty)$.

Hierzu vergleiche man die nachstehende Zeichnung [2.2.3.1-Z2]



Zeichnung [2.2.3.1-Z2]

PEARSONTYP 6 (HAUPTTYP III)

2.2.3.2 Der PEARSON-Haupttyp III (L) (PEARSON-Typ 6 (L))[1)]

Zusätzlich zu (2.2.3-1) gelte

(2.2.3.2-1a) $\mu_3 < 0$;

daraus ergibt sich, daß für X_1 und X_2 gem. (2.1-1o) gilt

(2.2.3.2-1b) $X_1 > 0$

und

(2.2.3.2-1c) $X_2 > 0$,

was sich wie bei Typ III (R) zeigen läßt.

Partialbruchzerlegung von r(x) gem. (2.1-9c) in einem beliebigen Koordinatensystem ergibt in diesem Fall

(2.2.3.2-2) $$r(x) = - \frac{s_1}{x_1 - x} - \frac{s_2}{x_2 - x} \quad .$$

Für (2.1-19b) erhält man

(2.2.3.2-3) $$\ln y = s_1 \cdot \ln (x_1 - x) + s_2 \cdot \ln (x_2 - x) + \text{Const}$$

und somit als Lösung von (2.1-19a)

(2.2.3.2-4a) $$y = \begin{cases} y_L^* \ (x_1 - x)^{s_1} (x_2 - x)^{s_2} & \text{für } x \in (-\infty, x_2) \ , \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei

---

1)Das "L" wird zur Verdeutlichung hinzugefügt, um auszudrücken, daß die betrachtete Kurve linksschief ist (vgl. [11], S. 356ff).

(2.2.3.2-4b) $$x_1 = -\frac{b_1}{2\,b_2} + \sqrt{\frac{b_1^2 - 4\,b_0\,b_2}{4\,b_2^2}} \quad ,$$

(2.2.3.2-4d) $$x_2 = -\frac{b_1}{2\,b_2} - \sqrt{\frac{b_1^2 - 4\,b_0\,b_2}{4\,b_2^2}} \quad ,$$

(2.2.3.2-4d) $$s_1 = \frac{x_1 + a}{b_2\,(x_1 - x_2)} \quad ,$$

(2.2.3.2-4e) $$s_2 = -\frac{x_2 + a}{b_2\,(x_1 - x_2)}$$

und

(2.2.3.2-4f) $$y_L^* = \frac{\Gamma(-s_1)}{\Gamma(-(s_1+s_2+1))\,\Gamma(s_2+1)} \quad \frac{1}{(x_1-x_2)^{s_1+s_2+1}} \quad .$$

Bezüglich der rechten Intervallgrenze bei x_2 gilt sinngemäß die bei Typ 1 gemachte Bemerkung (2.2.1-6).

Analog zu (2.2.3.1-6) gelten bei dem betrachteten PEARSON-Haupttyp III (L) die Beziehungen

(2.2.3.2-5a) $$s_1/(x_1 + a) = -\,s_2/(x_2 + a) \quad ,$$

(2.2.3.2-5b) $$s_1 + s_2 = \frac{1}{b_2} \quad ,$$

(2.2.3.2-5c) $$s_2 > -1$$

und

(2.2.3.2-5d) $$s_1 + s_2 \leq -5.$$

Es läßt sich mit Hilfe dieser Beziehungen leicht zeigen, daß (2.1-8) erfüllt ist.

Die Formeln für die zentralen Momente μ_i der betrachteten Verteilung in Abhängigkeit von den Verteilungsparametern sowie die sogen. "klassischen" Formeln für die Verteilungsparameter in Abhängigkeit von den zentralen Momenten sind mit den entsprechenden Formeln des PEARSON-Haupttyps I identisch (vgl. (2.2.1-17) und [1], S. 7o).

Wir unterscheiden

(i) unimodale Kurven, die durch

(2.2.3.2-6a) $s_2 \geq 0$ (PEARSON-Haupttyp III (L)(im engeren Sinn))

definiert sind,
und

(ii) J-förmige Kurven, die durch

(2.2.3.2-6b) $s_2 < 0$ (PEARSON-Haupttyp III (L; J))

definiert sind.

2.3 Die Spezialtypen des PEARSON-Systems

Von den im folgenden dargestellten Spezialtypen des PEARSON-Systems sind die Typen 0, 2, 3, 5 und 7 hervorzuheben, da es sich bei diesen Typen um Grenz- bzw. Obergangstypen zwischen den drei Haupttypen handelt; hierzu vergleiche man auch Zeichnung [2.4-Z1].

Von geringer Bedeutung sind die Spezialtypen 8, 9, 1o, 11 und 12, die jedoch der Vollständigkeit halber ebenfalls hergeleitet werden.

2.3.1 Der PEARSON-Typ 0 (Normalverteilung)

Seien

(2.3.1-1a) $b_2 = 0$,

(2.3.1-1b) $b_1 = 0$

und

(2.3.1-1c) $b_0 < 0$.

Dann gilt für r(x) gem. (2.1-9c) in dem betrachteten (beliebigen) Koordinatensystem

(2.3.1-2) $r(x) = \frac{x + a}{b_0}$.

Für (2.1-9b) erhält man

(2.3.1-3) $\ln y = \frac{1}{b_0} \left(\frac{1}{2} x^2 + a\, x \right) + \text{Const}$

und somit als Lösung von (2.1-9a)

(2.2.1-4a) $y = y^* \cdot \exp \left(- \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right)$ für $x \in (-\infty, \infty)$,

wobei

(2.3.1-4b) $m = - a$,

(2.3.1-4c) $\sigma^2 = - b_0$

und

(2.3.1-4d) $y^* = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$.

Es läßt sich leicht zeigen, daß (2.1-8) erfüllt ist.

In dem speziellen Koordinatensystem mit Mittelwert im Ursprung gilt für diesen Typ (vgl. 2.1-6c) und (2.3.1-1)

(2.3.1-6a) $\beta_1 = 0$

und

(2.3.1-6b) $\beta_2 = 3$.

Wie wir später noch sehen werden, ist dieser Typ ein Grenzfall aller drei Haupttypen und der Typen 2, 3, 5 und 7 (vgl. Zeichnung [2.4-Z1]).

Beispiel [2.3.1-B1]: Der PEARSON-Typ 0 (Die Normalverteilung)

Gegeben seien

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B_0 &= -1 \\ B_1 &= 0 \\ B_2 &= 0. \end{aligned} \qquad (2.3.1\text{-}B1\text{-}1)$$

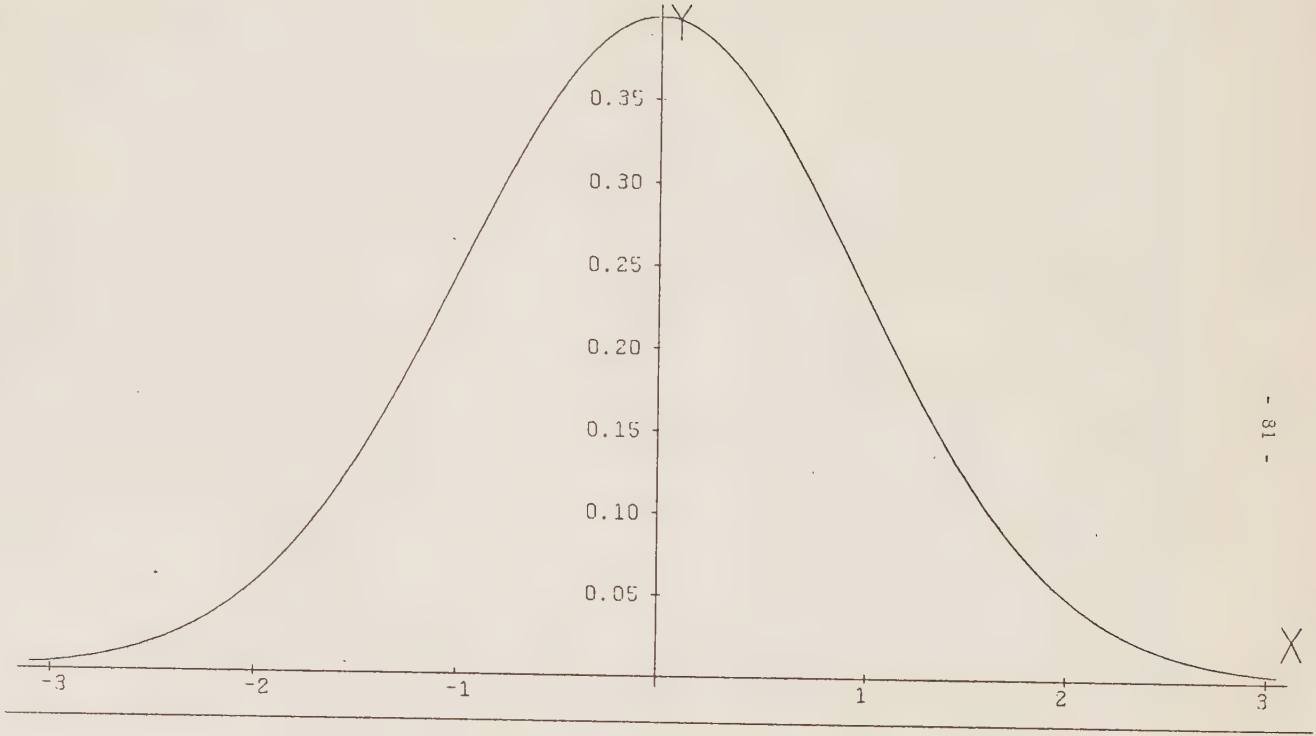
Dann ergeben sich

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= 1 \\ \mu_3 &= 0 \\ \mu_4 &= 3 \end{aligned} \qquad (2.3.1\text{-}B1\text{-}2)$$

und somit die Dichtefunktion

$$f(x) = 0{,}399 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ für } x \quad (-\infty, \infty). \qquad (2.3.1\text{-}B1\text{-}3)$$

Hierzu vergleiche man nachstehende Zeichnung [2.3.1-Z1].



Zeichnung: 2.3.1-Z1

PEARSONTYP 0

2.3.2 Der PEARSON-Typ 2

Dieser Typ ist ein Grenzfall von Typ 1 und dadurch definiert, daß gilt

(2.3.2-1a) $\varkappa = 0$ (vgl. (2.1-12))

und

(2.3.2-1b) $1 < \beta_2 < 3$ (vgl. (2.1-6b));

anhand von (2.3.2-1a) und (2.1-6) ergibt sich dann

(2.3.2-1c) $\beta_1 = 0.$

Für s_1 und s_2 gem. (2.2.1-4d,e) gilt in diesem Fall

(2.3.2-2a) $s_1 = s_2$,

woraus

(2.3.2-2b) $a = \frac{b_1}{2b_2}$

folgt (vgl. (2.2.1-4)).

Als Lösung von (2.1-9a) erhält man (vgl. (2.2.1-4)) in einem beliebigen Koordinatensystem

(2.3.2-3a) $$y = \begin{cases} y^{\varkappa} \, (x-x_2)^{s} \, (x_1-x)^{s} & \text{für } x \in \langle x_2, x_1 \rangle \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei

(2.3.2-3b) $$x_1 = -\frac{b_1}{2b_2} + \sqrt{\frac{b_1^2 - 4\,b_0\,b_2}{4\,b_2^2}}\,,$$

(2.3.2-3c) $$x_2 = -\frac{b_1}{2b_2} - \sqrt{\frac{b_1^2 - 4\,b_0\,b_2}{4\,b_2^2}}\,,$$

(2.3.2-3d) $$s = \frac{1}{2b_2}$$

und

(2.3.2-3e) $$y^* = 2^{2s+1} \cdot \frac{\Gamma(s+1+\frac{1}{2})}{\Gamma(s+1)\cdot\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(x_1-x_2)^{2s+1}}\,.$$

Bei der Herleitung von (2.3.2-3e) aus (2.2.1-4f) beachte man, daß

(2.3.2-4) $$\Gamma(x) \cdot \Gamma(x+\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \cdot \Gamma(2x)$$

(vgl. Anhang A 3) gilt.

Bzgl. der Intervallgrenzen sei auf Bemerkung (2.2.1-5) verwiesen.

Es läßt sich leicht nachweisen, daß (2.1-8) erfüllt ist.

Die PEARSON-Funktionen vom Typ 2 sind symmetrisch zur Achse x = - a.

Im speziellen Koordinatensystem mit Mittelwert im Ursprung gilt

(2.3.2-5) $$B_1 = 0.$$

Wir unterscheiden unimodale und U-förmige Kurven je nach dem, ob s gem. (2.3.2-3d) positiv oder negativ ist.

Die Funktionen des PEARSON-Typs 2 sind bekannter unter dem Namen symmetrische BETA-Verteilungen (hierzu vgl. (2.2.1-3o)).

B E I S P I E L E

Beispiel [2.3.2-B1]: Der PEARSON-Typ 2

Man setze

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= 1 \\ \mu_3 &= 0 \\ \mu_4 &= 2 \,. \end{aligned} \qquad \text{(2.3.2-B1-1)}$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B_0 &= -4 \\ B_1 &= 0 \\ B_2 &= 1 \,, \end{aligned} \qquad \text{(2.3.2-B1-2)}$$

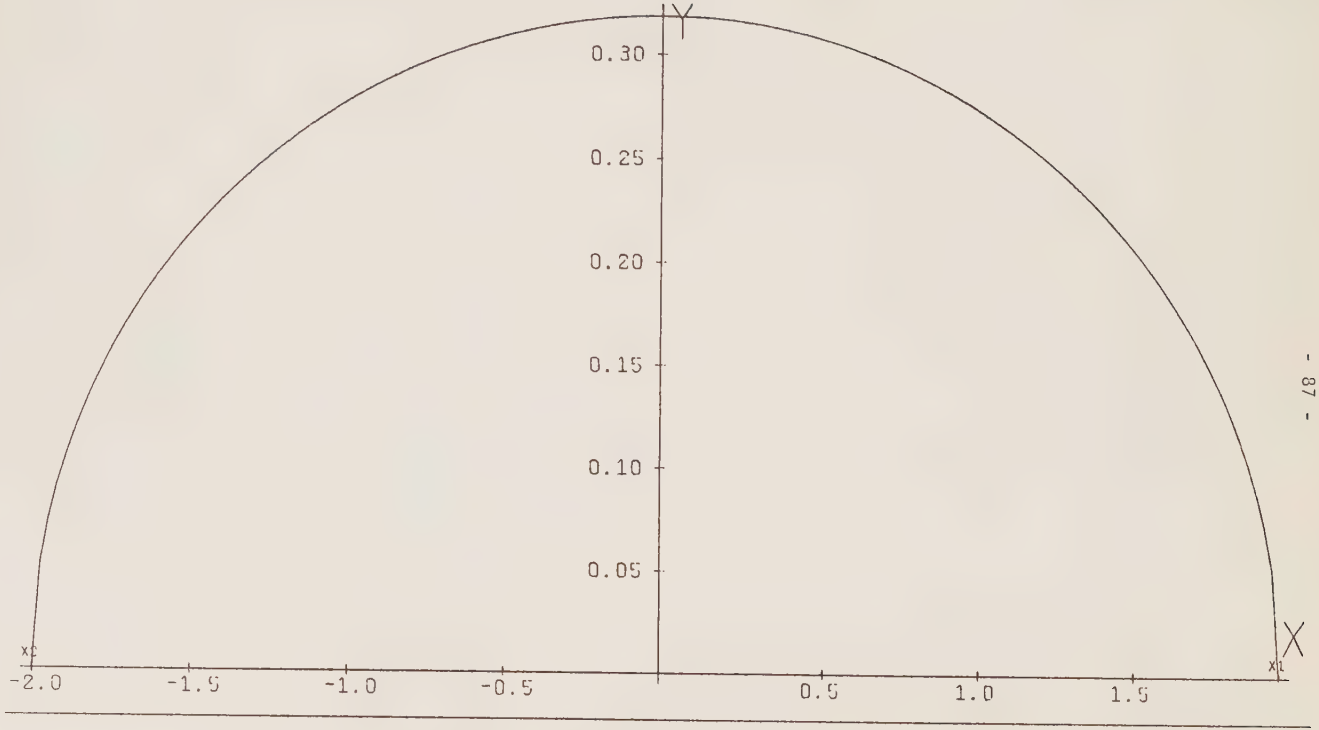
sowie

$$\varkappa = 0 \qquad \text{(2.3.2-B1-3)}$$

und somit die Dichtefunktion

$$f(x) = 0{,}159 \cdot (x+2)^{0,5}\,(2-x)^{0,5} \quad \text{für } x \in [-2,2]. \qquad \text{(2.3.2-B1-4)}$$

Hierzu vergleiche man nachstehende Zeichnung [2.3.2-Z1].



Zeichnung [2.3.2-Z1]

PEARSONTYP 2

Beispiel [2.3.2-B2]: Der PEARSON-Typ 2 (U)

Man setze

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= 1 \\ \mu_3 &= 0 \\ \mu_4 &= 1{,}5 \ . \end{aligned} \qquad \text{(2.3.2-B2-1)}$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B_0 &= 2 \\ B_1 &= 0 \\ B_2 &= -1 \ , \end{aligned} \qquad \text{(2.3.2-B2-2)}$$

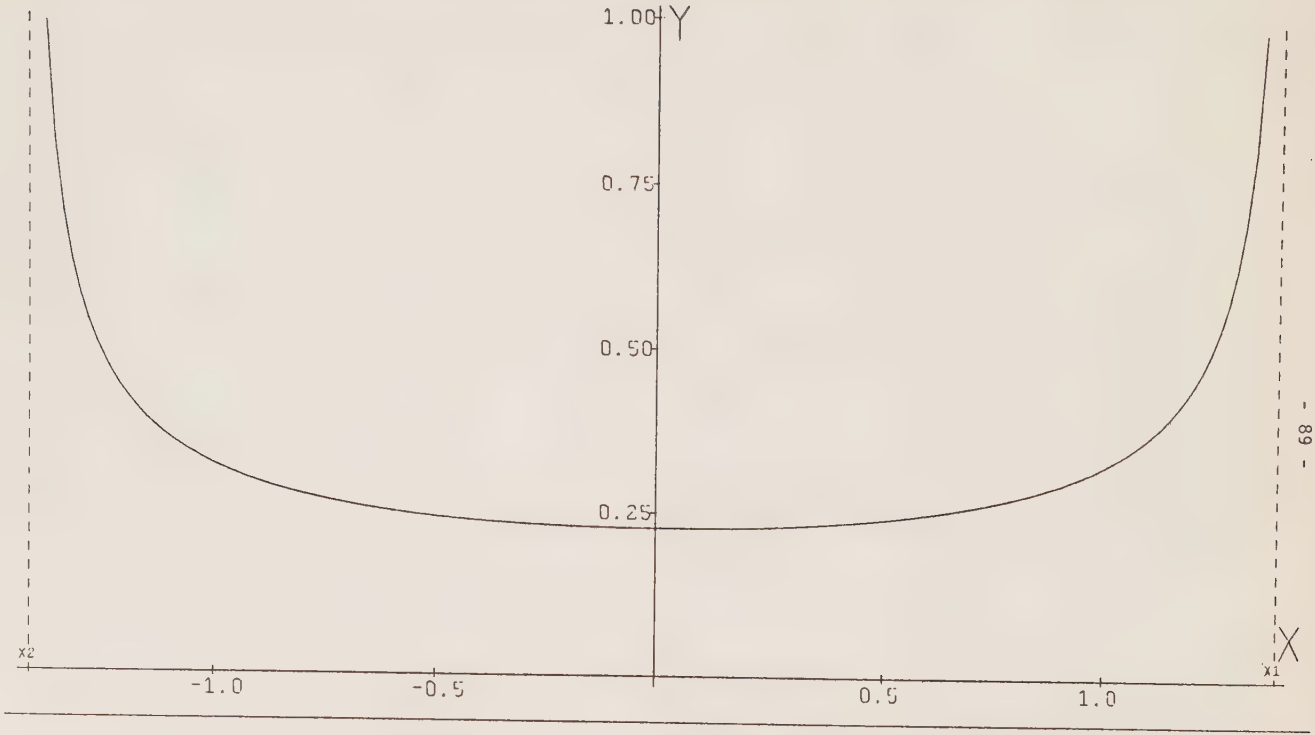
sowie

$$\varkappa = 0 \qquad \text{(2.3.2-B2-3)}$$

und somit die Dichtefunktion

$$f(x) = 0{,}318 \ . \ (x+\sqrt{2})^{-0,5} \ (\sqrt{2}-x)^{-0,5} \text{ für } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}). \qquad \text{(2.3.2-B2-4)}$$

Hierzu vergleiche man nachstehende Zeichnung [2.3.2-Z2].



Zeichnung [2.3.2-Z2]

PEARSONTYP 2

2.3.3 Der PEARSON-Typ 3

Dieser Typ ist definiert durch

(2.3.3-1) $b_2 = 0$ (vgl. (2.1-9a)).

Hieraus ergibt sich - je nach dem Vorzeichen von B_0 -

(2.3.3-2a) $\mathcal{H} = +\infty$

bzw.

(2.3.3.-2b) $\mathcal{H} = -\infty$ (vgl. (2.1-12) und (2.1-14)).

Der PEARSON-Typ 3 läßt sich somit als Obergangstyp zwischen dem PEARSON-Haupttyp I und dem PEARSON-Haupttyp III auffassen.

In unserem speziellen Koordinatensystem mit Mittelwert im Ursprung ist Typ 3 definiert durch

(2.3.3-3) $2\beta_2 - 3\beta_1 - 6 = 0$

(vgl. (2.1-6c), (2.2.1-9d) und (2.2.3.1-7c)).

Wir unterscheiden zwei Fälle.

2.3.3.1 Der PEARSON-Typ 3 (R)

Zusätzlich zu (2.3.3-1) gelte

(2.3.3.1-1a) $\mu_3 > 0$;

daraus ergibt sich

(2.3.3.1-1b) $B_1 < 0$ (vgl. (2.1-6c) und (2.1-14)).

Dann erhält man für (2.1-9b)

(2.3.3.1-2) $$\ln y = \frac{1}{b_1} x + \frac{1}{b_1} \left(a - \frac{b_0}{b_1}\right) \ln \left(x + \frac{b_0}{b_1}\right) + \text{Const}$$

und somit als Lösung von (2.1-9a)

(2.3.3.1-3a) $$y = \begin{cases} y_R^* \; e^{-\gamma^* x} \; (x-x_1)^{\gamma^* c} & \text{für } x \in \langle x_1, \infty), \\ 0 & \text{sonst} , \end{cases}$$

wobei

(2.3.3.1-3b) $$x_1 = - \frac{b_0}{b_1} ,$$

(2.3.3.1-3c) $$\gamma^* = - \frac{1}{b_1} ,$$

(2.3.3.1-3d) $$c = - \left(a - \frac{b_0}{b_1}\right)$$

und

(2.3.3.1-3e) $$y_R^* = e^{\gamma^* x_1} \; \gamma^{*\,1+\gamma^* c} \cdot \frac{1}{\Gamma(\gamma^* c + 1)} .$$

Für den Randpunkt x_1 gilt sinngemäß Bemerkung (2.2.1-5).

y_R^* ergibt sich wegen (2.1-8b), d.h.

(2.3.3.1-4) $$1 \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{\infty} y_R^* \, e^{-\gamma x} \, (x-x_1)^{\gamma c}\,dx$$

$$= y_R^* \, e^{-\gamma x_1} \, \gamma^{-\gamma c-1} \int_0^{\infty} e^{-z} \, z^{\gamma c}\,dz$$

(Transformation: $z = \gamma(x-x_1)$)

$$= y_R^* \, e^{-\gamma x_1} \, \gamma^{-\gamma c-1} \, \Gamma(\gamma c+1)$$

(vgl. Anhang A 3).

Ferner läßt sich leicht zeigen, daß (2.1-8a,c) erfüllt sind.

Wir unterscheiden unimodale und J-förmige Kurven je nach dem, ob $\gamma \cdot c$ positiv oder negativ ist.

Die PEARSON-Funktionen vom Typ 3 sind bekannt unter dem Namen GAMMA-Funktionen[1], deren Dichtefunktion man üblicherweise wie folgt angibt

(2.3.3.1-5a) $$f(x) = \frac{(x-\gamma)^{\alpha-1} \exp\left(-(x-\gamma)/\beta\right)}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)}$$

mit

(2.3.3.1-5b) $\alpha > 0$, $\beta > 0$ und $x > \gamma$.

---

1) vgl. [13], 1, S. 166ff

Gilt dabei

(2.3.3.1-6) $\alpha = 1$,so erhält man die EXPONENTIAL-Verteilung[1].

Falls gilt

(2.3.3.1-7) $\mu = 0, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \sigma^2$,

so ergibt sich die χ^2-Verteilung[2].

---

1) vgl. [13], 1, S. 207ff
2) vgl. [13], 1, S. 166ff

Beispiel [2.3.3.1-B1] : Der PEARSON-Typ 3 (R)

Man setze

$$\begin{aligned} A &= 0{,}5 \\ B_0 &= -1 \\ B_1 &= -0{,}5 \\ B_2 &= 0 \,. \end{aligned} \qquad \text{(2.3.3.1-B1-1)}$$

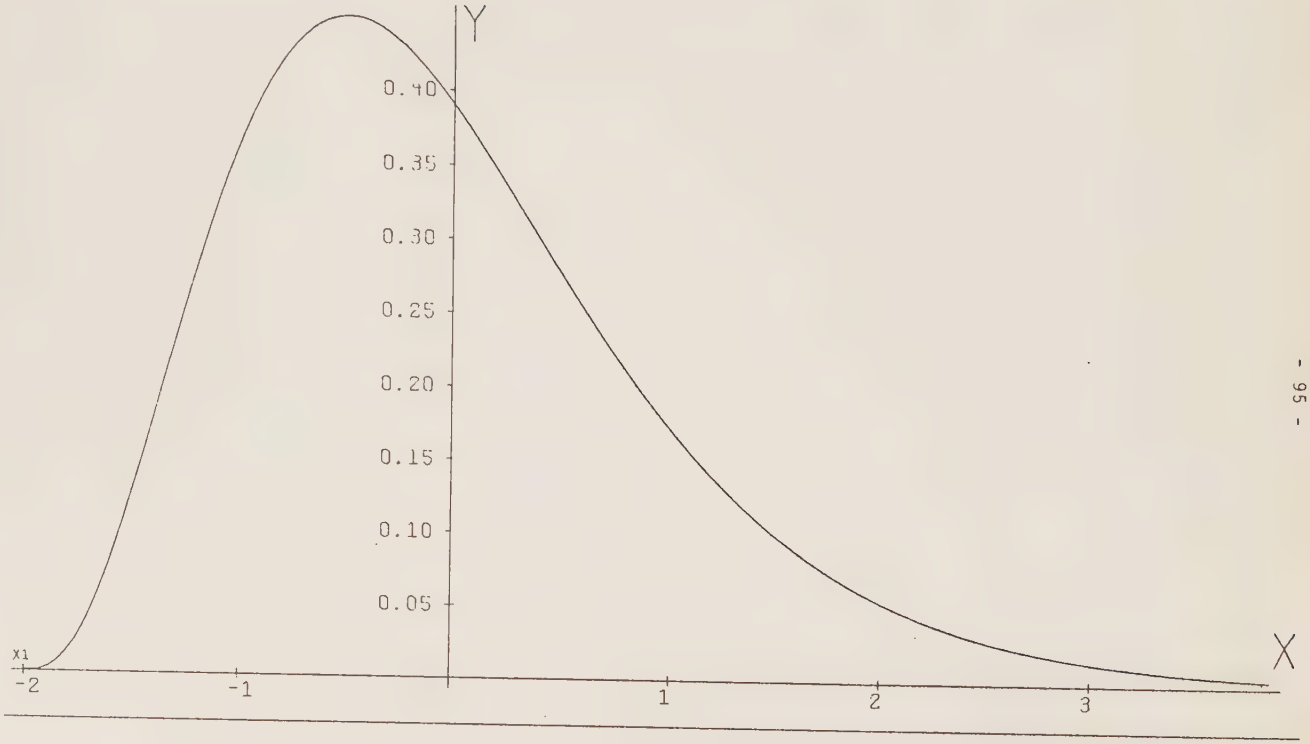
Dann erhält man

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= 1 \\ \mu_3 &= 1 \\ \mu_4 &= 4{,}5 \end{aligned} \qquad \text{(2.3.3.1-B1-2)}$$

und somit die Dichtefunktion

$$f(x) = 4{,}88 \cdot 10^{-2}\, e^{-2x}\, (x+2)^3 \quad \text{für } x \in [-2, \infty). \qquad \text{(2.3.3.1-B1-3)}$$

Hierzu vergleiche man nachstehende Zeichnung [2.3.3.1-Z1].



Zeichnung [2.3.3.1-Z1]

PEARSONTYP 3

Beispiel [2.3.3.1-B2] : Der PEARSON-Typ 3 (R; J)

Man setze

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= 1 \\ \mu_3 &= \sqrt{5} = 2{,}236 \\ \mu_4 &= 10{,}5 \ . \end{aligned} \qquad \text{(2.3.3.1-B2-1)}$$

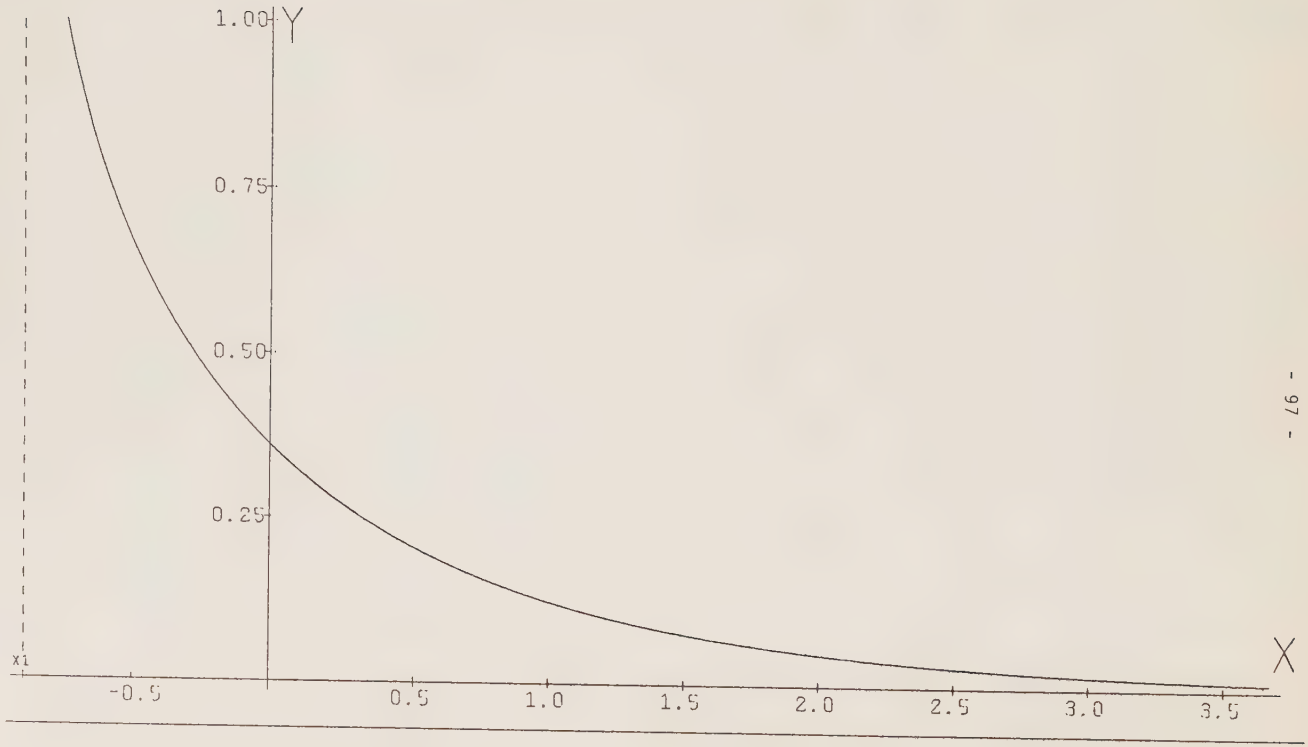
Dann erhält man

$$\begin{aligned} A &= 1{,}18 \\ B_0 &= -1 \\ B_1 &= -1{,}18 \\ B_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(2.3.3.1-B2-2)}$$

und somit die Dichtefunktion

$$f(x) = 0{,}353\ e^{-0{,}89\,x}\ (x + 0{,}89)^{-0{,}20} \quad \text{für } x \in (-0{,}89, \infty). \qquad \text{(2.3.3.1-B2-3)}$$

Hierzu vergleiche man nachstehende Zeichnung [2.3.3.1-Z2].



Zeichnung [2.3.3.1-Z2]

PEARSØNTYP 3

2.3.3.2 Der PEARSON-Typ 3 (L)

Zusätzlich zu (2.3.3 -1) gelte

(2.3.3.2-1a) $\mu_3 < 0$;

daraus ergibt sich

(2.3.3.2-1b) $B_1 > 0$ (vgl. (2.1-6c), (2.1-14)).

Als Lösung von (2.1-9a) erhält man in diesem Fall

(2.3.3.2-2a) $$y = \begin{cases} y_L^* \, e^{-\gamma x} \, (x_1 - x)^{\gamma c} & \text{für } x \in (-\infty, x_1> \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei

(2.3.3.2-2b) $$x_1 = -\frac{b_0}{b_1} ,$$

(2.3.3.2-2c) $$\gamma = -\frac{1}{b_1} ,$$

(2.3.3.2-2d) $$c = -\left(a - \frac{b_0}{b_1}\right)$$

und

(2.3.3.2-2e) $$y_L^* = e^{\gamma x_1} \, (-\gamma)^{1+\gamma c} \, \frac{1}{\Gamma(\gamma c+1)} .$$

Für den Randpunkt x_1 gilt sinngemäß Bemerkung (2.2.1-5).

Es läßt sich leicht zeigen, daß (2.1-8) erfüllt ist.

Je nachdem, ob γc positiv oder negativ ist, erhalten wir unimodale oder J-förmige Kurven.

2.3.4 Der PEARSON-Typ 5

Dieser Typ ist definiert durch

(2.3.4-1a) $\varkappa = 1$ (vgl. (2.1-12)),

bzw., was gleichbedeutend damit ist,

(2.3.4-1b) $b_1^2 = 4\, b_0\, b_2$ (vgl. (2.1-14))

oder

(2.3.4-1c) $\beta_1 (\beta_2+3)^2 = 4\,(4\beta_2-3\beta_1)(2\beta_2-3\beta_1-6)$ (vgl. (2.1-6c)).

Typ 5 ist somit der Obergangstyp zwischen dem PEARSON-Haupttyp II und dem PEARSON-Haupttyp III.

Wir unterscheiden zwei Fälle.

2.3.4.1 Der PEARSON-Typ 5 (R)

Zusätzlich zu (2.3.4-1) gelte

(2.3.4.1-1a) $\frac{1}{b_2}\left(a - \frac{b_1}{2b_2}\right) > 0$ (vgl. (2.2.2-3,6) und (2.2.3.1-4)).

Daraus ergibt sich

(2.3.4.1-1b) $\mu_3 > 0.$

Für (2.1-9b) ergibt sich dann

(2.3.4.1-2) $$\ln y = \frac{1}{b_2}\int \frac{x+a}{(x-x_1)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{b_2(x-x_1)} + \frac{a+x_1}{b_2(x-x_1)^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{b_2}\ln(x-x_1) - \frac{a+x_1}{b_2}\cdot\frac{1}{x-x_1} + \text{Const}$$

und somit als Lösung von (2.1-9a)

(2.3.4.1-3a) $$y = \begin{cases} y_R^* (x-x_1)^c \exp\left(-\frac{\lambda}{x-x_1}\right) & \text{für } x \in (x_1,\infty), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei

(2.3.4.1-3b) $$x_1 = -\frac{b_1}{2b_2},$$

(2.3.4.1-3c) $$c = \frac{1}{b_2},$$

(2.3.4.1-3d) $$\lambda = \frac{a+x_1}{b_2} = \frac{a(2b_2+1)}{2b_2^2}$$

und

(2.3.4.1-3e) $$y_R^* = \lambda^{-c-1}\cdot\frac{1}{\Gamma(-c-1)}.$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß (2.1-8) erfüllt ist, wobei man ausnutzt, daß

(2.3.4.1-4) $$c < -5$$ (vgl. (2.2.3.1-8) und (2.2.2-9)).

B E I S P I E L

Beispiel [2.3.4.1-B1] : Der PEARSON-Typ 5

Man setze

$$\text{(2.3.4.1-B1-1)}\qquad A = 1,\quad B_0 = -2,\quad B_1 = -1,\quad B_2 = -0{,}125.$$

Dann erhält man

$$\text{(2.3.4.1-B1-2)}\qquad \mu_1 = 0,\quad \mu_2 = 3{,}2,\quad \mu_3 = 12{,}8,\quad \mu_4 = 153{,}6\ ,$$

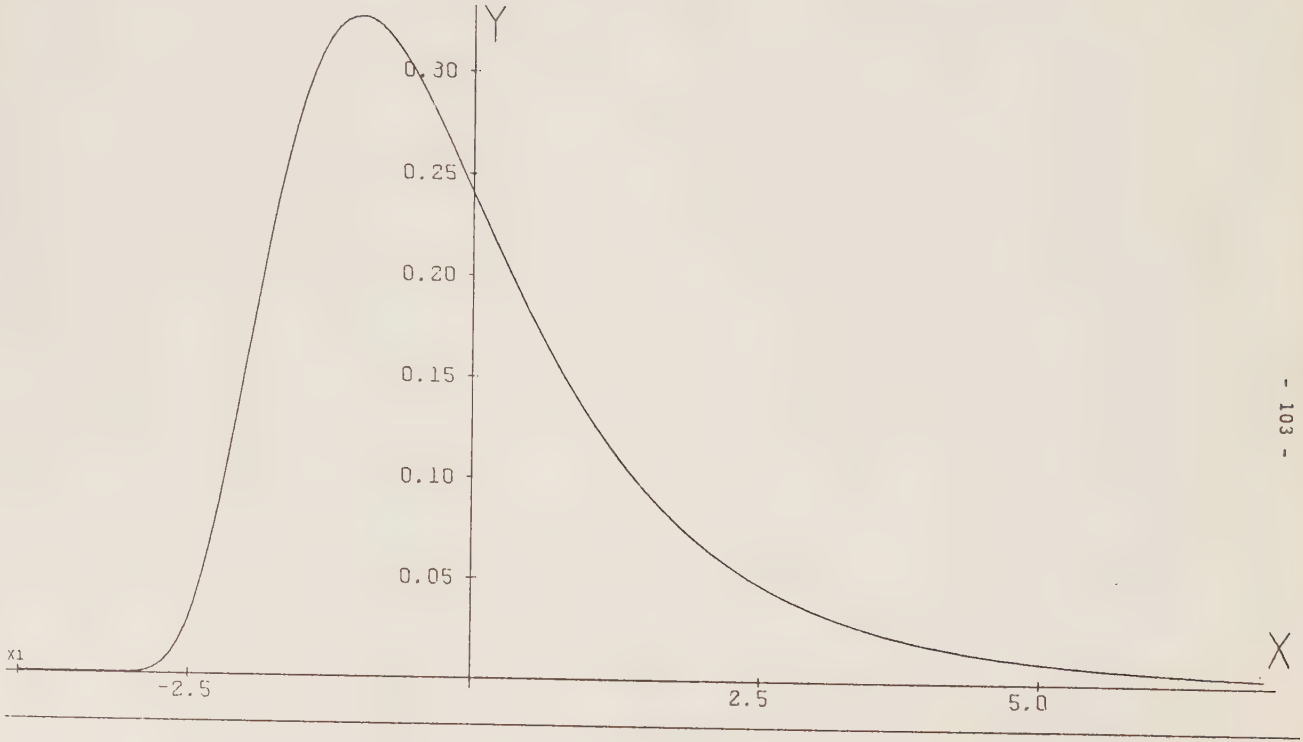
sowie

$$\text{(2.3.4.1-B1-3)}\qquad \varkappa = 1$$

und somit die Dichtefunktion

$$\text{(2.3.4.1-B1-4)}\qquad f(x) = 6{,}37 \cdot 10^{6}\ (x+4)^{-8}\ e^{-\frac{24}{x+4}} \quad \text{für } x \in (x_1, \infty).$$

Hierzu vergleiche man nachstehende Zeichnung [2.3.4.1-Z1].



Zeichnung [2.3.4.1-Z1]

PEARSØNTYP 5

2.3.4.2 Der PEARSON-Typ 5 (L)

Zusätzlich zu (2.3.4-1) gelte

(2.3.4.2-1a) $\frac{1}{b_2}\left(a - \frac{b_1}{2b_2}\right) < 0$ (vgl. (2.2.2-3,6) und (2.2.3.2-4)).

Daraus ergibt sich

(2.3.4.2-1b) $\mu_3 < 0$.

Analog zu 2.3.4.1 erhält man als Lösung von (2.1-9a)

(2.3.4.2-2a) $y = \begin{cases} y_L^* \, (x_1 - x)^c \exp\left(-\frac{\mu}{x_1 - x}\right) & \text{für } x \in (-\infty, x_1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$,

wobei

(2.3.4.2-2b) $x_1 = -\frac{b_1}{2b_2}$,

(2.3.4.2-2c) $c = \frac{1}{b_2}$,

(2.3.4.2-2d) $\mu = \frac{a + x_1}{b_2}$

und

(2.3.4.2-2e) $y_L^* = (-\mu)^{-c-1} \cdot \frac{1}{\Gamma(-c-1)}$.

Man überzeugt sich ferner leicht davon, daß (2.1-8) erfüllt ist.

2.3.5 Der PEARSON-Typ 7

Dieser Typ ist ein Grenzfall von PEARSON-Haupttyp II und dadurch definiert, daß im speziellen Koordinatensystem mit Mittelwert im Ursprung gilt

(2.3.5-1a) $B_1 = 0$,

(2.3.5-1b) $B_2 < 0$

und

(2.3.5-1c) $B_0 < 0$.

Dann gilt

(2.3.5-2a) $\varkappa = 0$ (vgl. (2.1-12)),

sowie

(2.3.5-2b) $\beta_1 = 0$

und

(2.3.5-2c) $\beta_2 > 3$ (vgl. (2.1-6b)).

Ferner ergibt sich in einem beliebigen Koordinatensystem

(2.3.5-3) $c = a - \frac{b_1}{2b_2} = 0$ (vgl. (2.1-14), (2.2.2 -3b) und (2.2.2-6e)).

Als Lösung von (2.1-9a) erhält man (vgl. (2.2.2-6))

(2.3.5-4a) $y = y^{*} ((x-r)^2 + q^2)^{-s}$ für $x \in (-\infty, \infty)$,

wobei

(2.3.5-4b) $r = -\frac{b_1}{2b_2}$,

(2.3.5-4c) $q = \sqrt{\frac{4\, b_0\, b_2 - b_1^2}{4b_2^2}}$,

(2.3.5-4d) $s = -\frac{1}{2b_2}$

und

(2.3.5-4e) $y^{*} = \frac{1}{2}\, q^{2s-1}\, \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\frac{1}{2}) \cdot \sqrt{\pi}}$ (vgl. auch Anhang A 3).

Man überzeugt sich leicht, daß (2.1-8) erfüllt ist.

Spezialfälle des PEARSON-Typs 7 sind die t-Verteilung (STUDENT-Verteilung)[1] mit Dichtefunktion

(2.3.5-5a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu} \cdot B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu)} (1 + \frac{x^2}{\nu})^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}$ für $x \in (-\infty, \infty)$

mit

(2.3.5-5b) $\nu > 0$,

sowie die CAUCHY-Verteilung[2] mit Dichtefunktion

(2.3.5-6a) $f(x) = \frac{1}{\pi\lambda} (1 - ((x-\theta)/\lambda)^2)^{-1}$ für $x \in (-\infty, \infty)$

mit

(2.3.5-6b) $\lambda > 0$.

---

1) vgl. [13], 2, S. 94ff
2) vgl. [13], 1, S. 154ff

B E I S P I E L

Beispiel [2.3.5-B1]: Der PEARSON-Typ 7

Man setze

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= 1 \\ \mu_3 &= 0 \\ \mu_4 &= 5. \end{aligned} \qquad \text{(2.3.5-B1-1)}$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B_0 &= -\,0{,}625 \\ B_1 &= 0 \\ B_2 &= -\,0{,}125 \end{aligned} \qquad \text{(2.3.5-B1-2)}$$

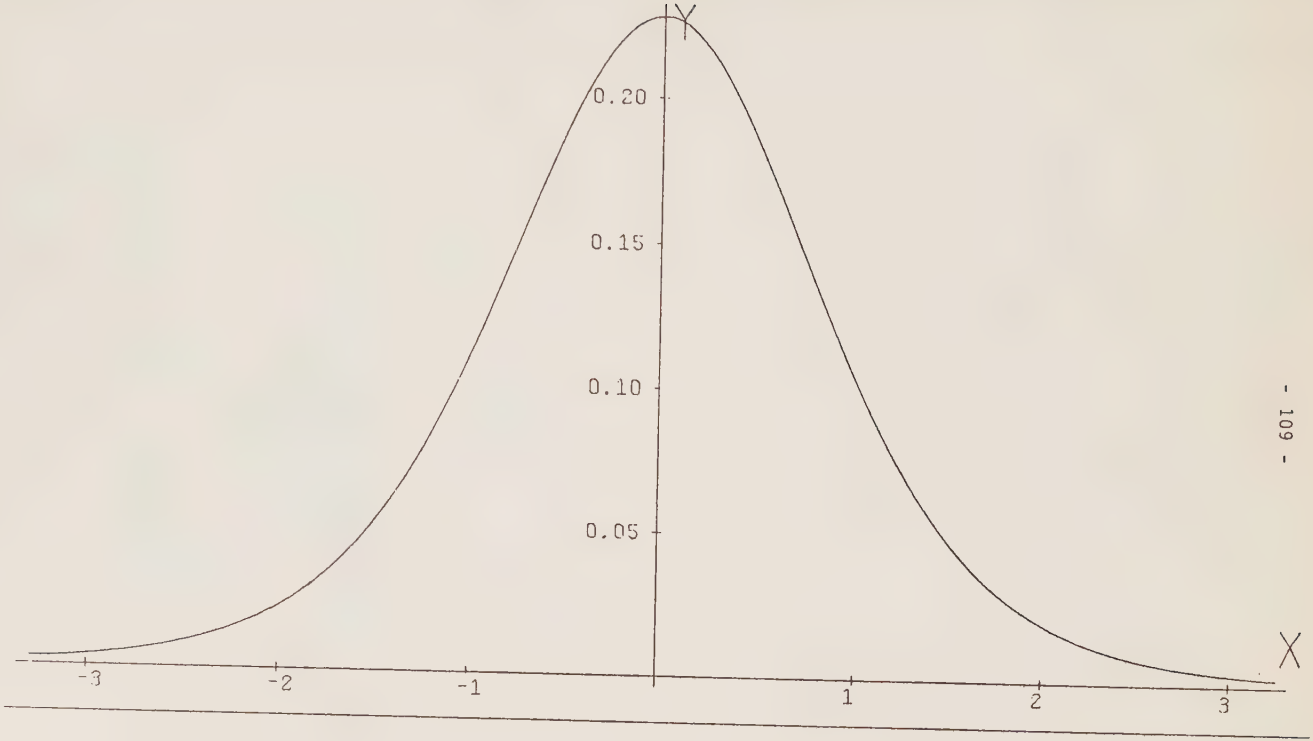
sowie

$$\mathcal{K} = 0 \qquad \text{(2.3.5-B1-3)}$$

und damit die Dichtefunktion

$$f(x) = 1{,}42 \cdot 10^2 \,(x^2 + 2{,}24^2)^{-4} \text{ für } x \in (-\infty, \infty). \qquad \text{(2.3.5-B1-4)}$$

Hierzu vergleiche man nachstehende Zeichnung [2.3.5-Z1].



Zeichnung [2.3.5-Z1]

PEARSØNTYP 7

2.3.6 Der PEARSON-Typ 8

Dieser Typ ist ein Spezialfall von Haupttyp I, d.h. es gilt

(2.3.6-1) $\varkappa < 0$ (vgl. (2.2.1-1)).

Wir unterscheiden zwei Fälle.

2.3.6.1 Der PEARSON-Typ 8 (R)

Zusätzlich zu (2.3.6-1) gelte noch

(2.3.6.1-1a) $s_1 = 0$

und

(2.3.6.1-1b) $s_2 < 0$ (vgl. (2.2.1-7)).

Dann ergibt sich als Lösung von (2.1-9a)

(2.3.6.1-2a) $$y = \begin{cases} y_R^* \, (x-x_2)^{s_2} & \text{für } (x_2, x_1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei

(2.3.6.1-2b) $$x_1 = -\frac{b_1}{2b_2} + \sqrt{\frac{b_1^2 - 4\, b_0\, b_2}{4\, b_2^2}},$$

(2.3.6.1-2c) $$x_2 = -\frac{b_1}{2b_2} - \sqrt{\frac{b_1^2 - 4\, b_0\, b_2}{4\, b_2^2}},$$

(2.3.6.1-2d) $$s_2 = -\frac{x_2 + a}{b_2\,(x_1 - x_2)}$$

und

(2.3.6.1-2e) $$y^x = \frac{s_2 + 1}{(x_1 - x_2)^{s_2+1}} \quad .$$

Im folgenden soll noch kurz die von ELDERTON (vgl. [1], S. 45 und S.86) benutzte Definition dieses Typs hergeleitet werden:

Es gilt wegen (2.3.6-1)

(2.3.6.1-3a) $$b_2 \neq 0$$

und

(2.3.6.1-3b) $$b_1^2 \neq 4\, b_0\, b_2 \qquad \text{(vgl. auch (2.1-14))}.$$

Aus (2.3.6.1-1a) erhält man

(2.3.6.1-4) $$-a\,(b_1 - a\,b_2) + b_0 = 0.$$

Wir definieren

(2.3.6.1-5a) $$\lambda = -\frac{b_0 - a\,(b_1 - a\,b_2)}{b_2\,(b_1^2 - 4\,b_0\,b_2)} \quad ,$$

was wegen (2.1-14) und (2.1-6c) auch gleichbedeutend mit

(2.3.6.1-5b) $$\lambda = \frac{(4\beta_2 - 3\beta_1)(10\beta_2 - 12\beta_1 - 18)^2 - \beta_1(\beta_2+3)^2(8\beta_2 - 9\beta_1 - 12)}{(3\beta_1 - 2\beta_2 + 6)(\beta_1(\beta_2+3)^2 + 4(4\beta_2 - 3\beta_1)(3\beta_1 - 2\beta_2 + 6))}$$

ist.[1)]

Dann ist Typ 8 (R) in unserem speziellen Koordinatensystem definiert durch

(2.3.6.1-6a) $$\varkappa < 0 \quad ,$$

---

1) vgl. [1], S. 86

(2.3.6.1-6b) $\lambda = 0$,

(2.3.6.1-6c) $5\beta_2 - 6\beta_1 - 9 < 0$

und

(2.3.6.1-6d) $\mu_3 > 0$.

Zu (2.3.6.1-6c) vergleiche man (2.3.6.1-1b) und den Beweis zu (2.2.1-7d).

B E I S P I E L

Beispiel [2.3.6.1-B1]: Der Pearson-Typ 8

Man setze

$$A = -\sqrt{5} = -2{,}236$$
$$B_0 = 5$$
(2.3.6.1-B1-1) $$B_1 = \sqrt{5} = 2{,}236$$
$$B_2 = -2 \ .$$

Dann erhält man

$$\mu_1 = 0$$
(2.3.6.1-B1-2) $$\mu_2 = 1$$
$$\mu_3 = 0{,}639$$
$$\mu_4 = 2{,}14 \ ,$$

sowie

(2.3.6.1-B1-3) $$\mathcal{H} = -0{,}125.$$

Für s_1 und s_2 gem. (2.2.1-7) erhält man die Werte

(2.3.6.1-B1-4a) $$s_1 = 0$$

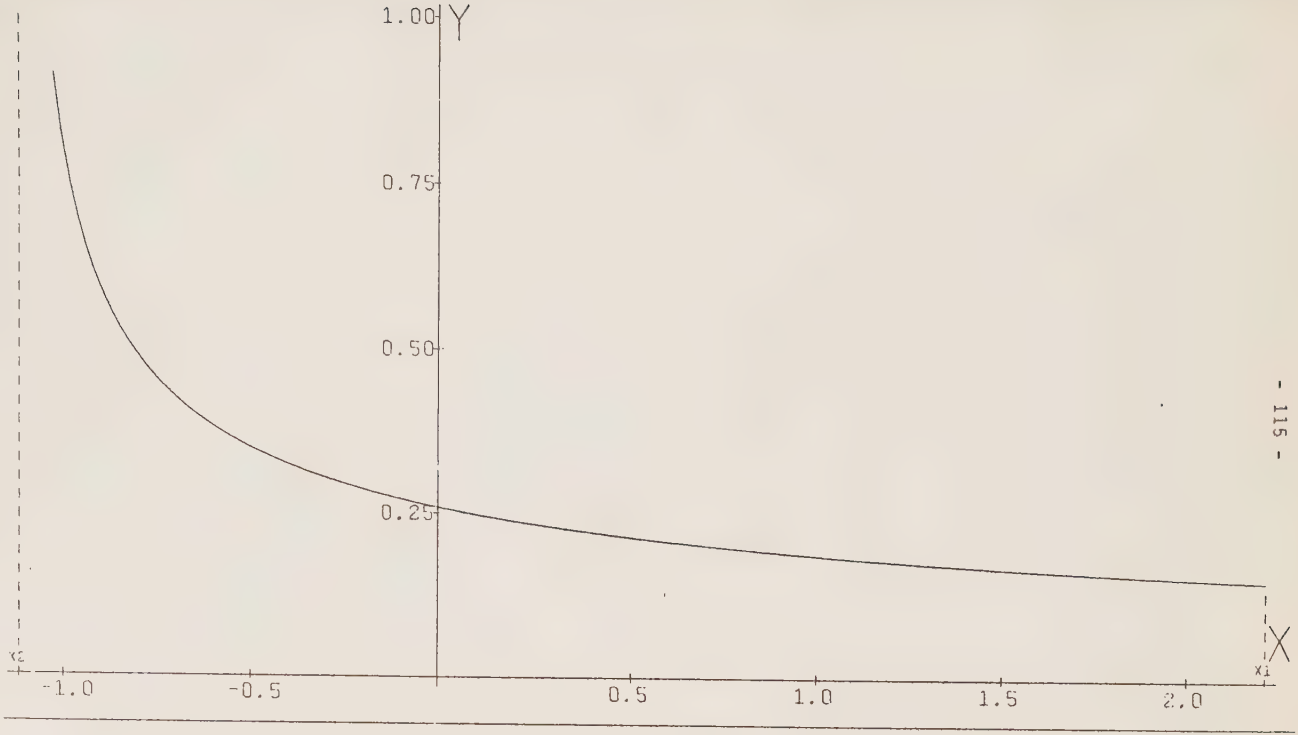
und

(2.3.6.1-B1-4b) $$s_2 = -0{,}5 < 0$$

und somit als Dichtefunktion

(2.3.6.1-B1-5) $$f(x) = 0{,}273 \ . \ (x + 1{,}12)^{-0{,}5} \text{ für } x \in (-1{,}12,\ 2{,}24] \ .$$

Hierzu vergleiche man nachstehende Zeichnung [2.3.6.1-Z1].



Zeichnung [2.3.6-Z1]

PEARSONTYP 8

2.3.6.2 Der PEARSON-Typ 8 (L)

Dieser Typ ist analog zu Typ 8 (R) definiert.

Zusätzlich zu (2.3.6-1) gelte

(2.3.6.2-1a) $s_2 = 0$

und

(2.3.6.2-1b) $s_1 < 0$ (vgl. (2.1-12), (2.2.1-7)).

Als Lösung von (2.1-9a) erhält man

(2.3.6.2-2a) $$y = \begin{cases} y_L^* \, (x_1 - x)^{s_1} & \text{für } x \in [x_2, x_1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei

(2.3.6.2-2b) $$x_1 = -\frac{b_1}{2b_2} + \sqrt{\frac{b_1^2 - 4\, b_0\, b_2}{4b_2^2}},$$

(2.3.6.2-2c) $$x_2 = -\frac{b_1}{2b_2} - \sqrt{\frac{b_1^2 - 4\, b_0\, b_2}{4b_2^2}},$$

(2.3.6.2-2d) $$s_1 = \frac{x_1 + a}{b_2\,(x_1 - x_2)}$$

und

(2.3.6.2-2e) $$y^* = \frac{s_1 + 1}{(x_1 - x_2)^{s_1 + 1}} \quad .$$

2.3.7 Der PEARSON-Typ 9

Ähnlich wie Typ 8 ist auch Typ 9 ein Spezialfall von Haupttyp I.

Es gelte

(2.3.7-1) $\varkappa < 0$ (vgl. (2.2.1-1)).

Wir unterscheiden zwei Fälle.

2.3.7.1 Der PEARSON-Typ 9 (R)

Zusätzlich zu (2.3.7-1) gelte

(2.3.7.1-1a) $s_2 = 0$

und

(2.3.7.1-1b) $s_1 > 0$ (vgl. (2.2.1-7)).

Als Lösung von (2.1-9a) erhält man dann

(2.3.7.1-2a) $$y = \begin{cases} y_R^* \, (x_1 - x)^{s_1} & \text{für } x \in [x_2, x_1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei

(2.3.7.1-2b) $$x_1 = -\frac{b_1}{2b_2} + \sqrt{\frac{b_1^2 - 4\, b_0\, b_2}{4\, b_2^2}},$$

(2.3.7.1-2c) $$x_2 = -\frac{b_1}{2b_2} - \sqrt{\frac{b_1^2 - 4\,b_0\,b_2}{4b_2^2}}\quad,$$

(2.3.7.1-2d) $$s_1 = \frac{x_1 + a}{b_2\,(x_1 - x_2)}$$

und

(2.3.7.1-2e) $$y^* = \frac{s_1 + 1}{(x_1 - x_2)^{s_1+1}}\quad.$$

Statt durch (2.3.7.1-1) läßt sich dieser Typ auch wie folgt definieren:

(2.3.7.1-3a) $\varkappa < 0$,

(2.3.7.1-3b) $\lambda = 0$,

(2.3.7.1-3c) $5\beta_2 - 6\beta_1 - 9 > 0$,

(2.3.7.1-3d) $2\beta_2 - 3\beta_1 - 6 < 0$

und

(2.3.7.1-3e) $\mu_3 > 0$ (vgl. (2.1-12), (2.1-6c), (2.3.6.1-5), (2.3.7.1-1) und [1], S. 46)

B E I S P I E L

Beispiel [2.3.7.1-B1]: Der PEARSON-Typ 9

Man setze

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B_0 &= -1{,}1 \\ B_1 &= -1 \\ B_2 &= 0{,}1. \end{aligned} \qquad \text{(2.3.7.1-B1-1)}$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= 0{,}846 \\ \mu_3 &= 1{,}209 \\ \mu_4 &= 4{,}279 \end{aligned} \qquad \text{(2.3.7.1-B1-2)}$$

sowie

$$\varkappa = -2{,}273. \qquad \text{(2.3.7.1-B1-3)}$$

Für s_1 und s_2 gem. (2.2.1-7) erhält man die Werte

$$s_2 = 0 \qquad \text{(2.3.7.1-B1-4a)}$$

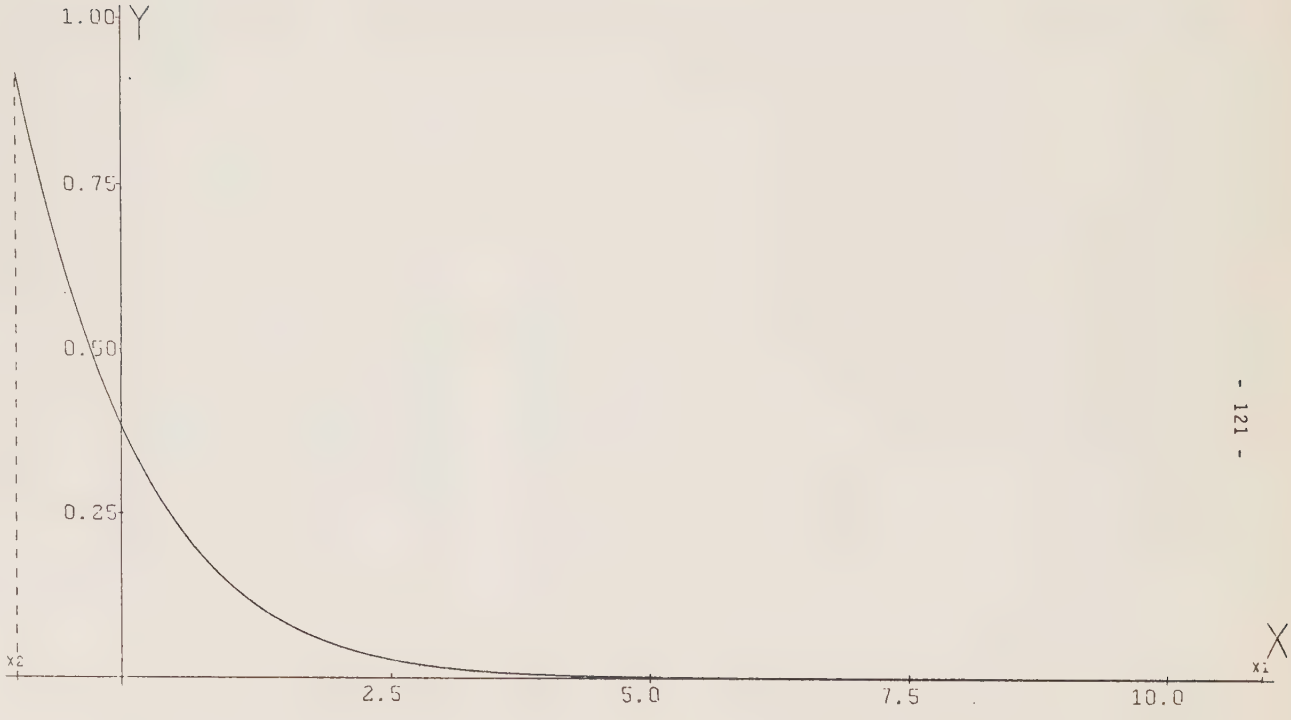
und

$$s_1 = 10 > 0 \qquad \text{(2.3.7.1-B1-4b)}$$

und somit als Dichtefunktion

$$f(x) = 1{,}48 \cdot 10^{-11} (11 - x)^{10} \text{ für } x \in [-1{,}11] . \qquad \text{(2.3.7.1-B1-5)}$$

Hierzu vergleiche man nachstehende Zeichnung [2.3.7.1-Z1].



Zeichnung [2.3.7.1-Z1]

PEARSONTYP 9

2.3.7.2 Der PEARSON-Typ 9 (L)

Zusätzlich zu (2.3.7-1) gelte

(2.3.7.2-1a) $s_1 = 0$

und

(2.3.7.2-1b) $s_2 > 0$ (vgl. (2.2.1-7)).

Als Lösung von (2.1-9a) ergibt sich dann

(2.3.7.2-2a) $$y = \begin{cases} y_L^* \, (x-x_2)^{s_2} & \text{für } x \in [x_2, x_1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

wobei

(2.3.7.2-2b) $$x_1 = -\frac{b_1}{2b_2} + \sqrt{\frac{b_1^2 - 4\, b_0\, b_2}{4b_2^2}} ,$$

(2.3.7.2-2c) $$x_2 = -\frac{b_1}{2b_2} - \sqrt{\frac{b_1^2 - 4\, b_0\, b_2}{4b_2^2}} ,$$

(2.3.7.2-2d) $$s_2 = -\frac{a + x_2}{b_2\,(x_1 - x_2)}$$

und

(2.3.7.2-2e) $$y_L^* = \frac{s_2 + 1}{(x_1 - x_2)^{s_2+1}} .$$

2.3.8 Der PEARSON-Typ 1o

Dieser Typ ist ein Spezialfall von Typ 3.

Zusätzlich zu

(2.3.8-1a) $b_2 = 0$

soll hier noch gelten

(2.3.8-1b) $a = \frac{b_0}{b_1}$ (vgl. (2.3.3.1-3d) bzw. (2.3.3.2-2d)).

Dann gilt (vgl. (2.1-6b))

(2.3.8-2a) $\beta_1 = 4$

und

(2.3.8-2b) $\beta_2 = 9.$

Wie bei Typ 3 unterscheiden wir auch hier zwei Fälle.

2.3.8.1 Der PEARSON-Typ 1o (R)

Zusätzlich zu (2.3.8-1) sei

(2.3.8.1-1) $\mu_3 > 0.$

Dann gilt

(2.3.8.1-2) $B_1 < 0$ (vgl. (2.1-6c)).

Als Lösung von (2.1-9a) erhält man (vgl. 2.3.3.1-3))

(2.3.8.1-3a) $$y = \begin{cases} y_R^* \; e^{-\gamma x} & \text{für } x \in [x_1, \infty), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei

(2.3.8.1-3b) $$x_1 = -\frac{b_0}{b_1} ,$$

(2.3.8.1-3c) $$\gamma = -\frac{1}{b_1}$$

und

(2.3.8.1-3d) $$y_R^* = \gamma \cdot e^{\gamma \cdot x_1} .$$

B E I S P I E L

Beispiel [2.3.8.1-B1]: Der PEARSON-Typ 1o

Man setze

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B_0 &= -1 \\ B_1 &= -1 \\ B_2 &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(2.3.8.1-B1-1)}$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= 1 \\ \mu_3 &= 2 \\ \mu_4 &= 9 \end{aligned} \qquad \text{(2.3.8.1-B1-2)}$$

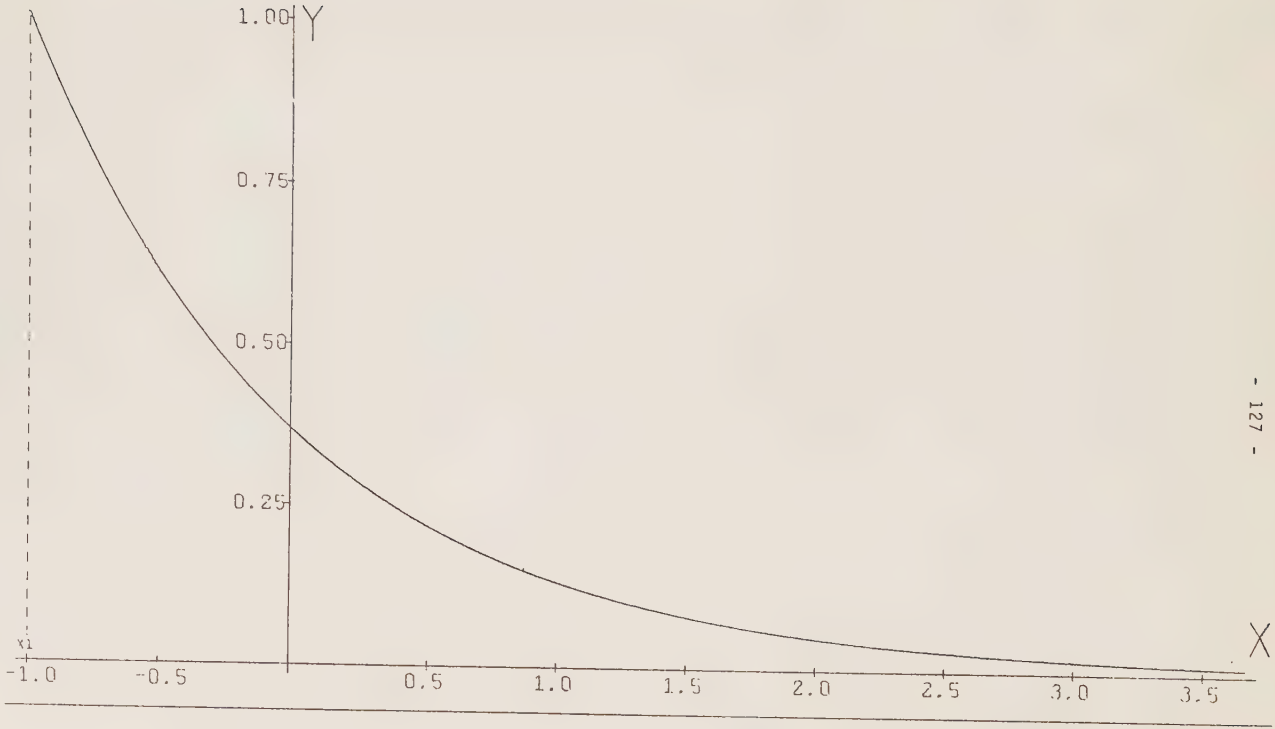
sowie

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 4 \\ \beta_2 &= 9 \end{aligned} \qquad \text{(2.3.8.1-B1-3)}$$

und somit die Dichtefunktion

$$f(x) = 0{,}368 \cdot e^{-x} \text{ für } x \in [-1, \infty). \qquad \text{(2.3.8.1-B1-4)}$$

Hierzu vergleiche man nachstehende Zeichnung [2.3.8.1-Z1] .



Zeichnung [2.3.8.1-Z1]

PEARSONTYP 10

2.3.8.2 Der PEARSON-Typ 1o (L)

Zusätzlich zu (2.3.8-1) gelte

(2.3.8.2-1) $\mu_3 < 0.$

Dann gilt

(2.3.8.2-2) $B_1 > 0$ (vgl. (2.1-6c)).

Als Lösung von (2.1-9a) erhält man (vgl. (2.3.3.2-2))

(2.3.8.2-3a) $$y = \begin{cases} y_L^* \cdot e^{-\beta x} & \text{für } x \in (-\infty, x_1], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei

(2.3.8.2-3b) $$x_1 = -\frac{b_0}{b_1},$$

(2.3.8.2-3c) $$\beta = -\frac{1}{b_1}$$

und

(2.3.8.2-3d) $$y_L^* = -\beta \cdot e^{\beta x_1}.$$

2.3.9. Der PEARSON-Typ 11

Dieser Typ ist ein Spezialfall von Haupttyp III, d.h. es gilt

(2.3.9.1-) $\varkappa > 1$ (vgl. (2.2.3-1)).

Wir unterscheiden zwei Fälle.

2.3.9.1 Der PEARSON-Typ 11 (R)

Zusätzlich zu (2.3.9-1) gelte

(2.3.9.1-1a) $\mu_3 > 0$ (vgl. (2.2.3.1-1)).

und außerdem

(2.3.9.1-1b) $s_1 = 0$ (vgl. 2.2.3.1-4)).

Als Lösung von (2.1-9a) erhält man

(2.3.9.1-2a) $$y = \begin{cases} y_R^* \, (x-x_2)^{s_2} & \text{für } x \in [x_1, \infty), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei

(2.3.9.1-2b) $$x_1 = -\frac{b_1}{2b_2} + \frac{\sqrt{b_1^2 - 4\,b_0\,b_2}}{4b_2^2},$$

(2.3.9.1-2c) $$x_2 = -\frac{b_1}{2b_2} - \frac{\sqrt{b_1^2 - 4\,b_0\,b_2}}{4b_2^2},$$

(2.3.9.1-2d) $$s_2 = \frac{1}{b_2}$$

und

(2.3.9.1-2e) $$y_R^* = -(s_2+1)\,\frac{1}{(x_1-x_2)^{s_2+1}}$$ (vgl. 2.2.3.1-4) und (2.2.3.1-6d)).

Statt durch (2.3.9.1-1) kann man diesen Typ auch durch

(2.3.9.1-3a) $\varkappa > 1$,

(2.3.9.1-3b) $\lambda = 0$,

(2.3.9.1-3c) $3\beta_1 - 2\beta_2 + 6 < 0$

und

(2.3.9.1-3d) $\mu_3 > 0$

definieren (vgl. (2.1-12), (2.1-6c), (2.3.6.1-5), (2.3.9.1-1) und [1], S 46).

B E I S P I E L

Beispiel: [2.3.9.1-B1]: Der PEARSON-Typ 11

Man setze

$$\begin{aligned} A &= 1{,}5 \\ B_0 &= -2 \\ B_1 &= -1{,}5 \\ B_2 &= -\frac{1}{9} = -0{,}111. \end{aligned} \tag{2.3.9.1-B1-1}$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= 3 \\ \mu_3 &= 16{,}2 \\ \mu_4 &= 204{,}525 \end{aligned} \tag{2.3.9.1-B1-2}$$

sowie

$$\varkappa = 2{,}53. \tag{2.3.9.1-B1-3}$$

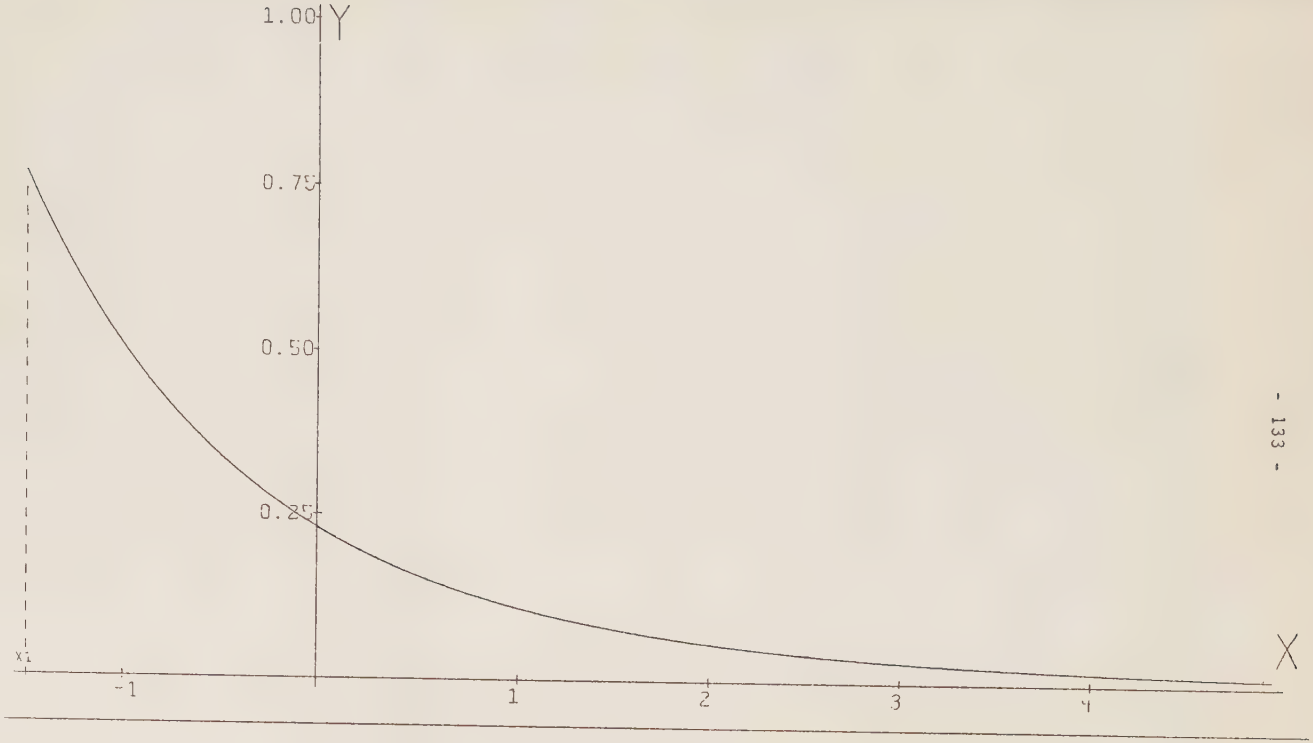
Für s_1 gem. (2.2.3.1-4d) erhält man den Wert

$$s_1 = 0 \tag{2.3.9.1-B1-4}$$

und somit als Dichtefunktion

$$f(x) = 1{,}18 \cdot 10^9 \, (x+12)^{-9} \text{ für } x \in [-1{,}5, \infty). \tag{2.3.9.1-B1-5}$$

Hierzu vergleiche man nachstehende Zeichnung [2.3.9.1-Z1].



Zeichnung [2.3.9.1-Z1]

PEARSONTYP 11

2.3.9.2 Der PEARSON-Typ 11 (L)

Zusätzlich zu (2.3.9-1) gelte

(2.3.9.2-1a) $\mu_3 < 0$ (vgl. (2.2.3.2-1))

und außerdem

(2.3.9.2-1b) $s_2 = 0$ (vgl. (2.2.3.2-4)).

Als Lösung von (2.1-9a) erhält man dann

(2.3.9.2-2a) $$y = \begin{cases} y_L^* \, (x_1 - x)^{s_1} & \text{für } x \in (-\infty, x_2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei

(2.3.9.2-2b) $$x_1 = -\frac{b_1}{2b_2} + \sqrt{\frac{b_1^2 - 4\, b_0\, b_2}{4b_2^2}},$$

(2.3.9.2-2c) $$x_2 = -\frac{b_1}{2b_2} - \sqrt{\frac{b_1^2 - 4\, b_0\, b_2}{4b_2^2}},$$

(2.3.9.2-2d) $$s_1 = \frac{1}{b_2}$$

und

(2.3.9.2-2e) $$y_L^* = -\frac{s_1 + 1}{(x_1 - x_2)^{s_1 + 1}}.$$

2.3.1o Der PEARSON-Typ 12

Dieser Typ ist ein Spezialtyp von Haupttyp I, d.h. es gilt

2.3.1o-1a) $\mathfrak{Re} < 0$ (vgl. (2.1.-12b) und (2.2.1-1)).

Ferner sei

2.3.1o-1b) $s_1 + s_2 = 0$ (vgl. (2.2.1-4)).

Aus (2.3.1o-1b) folgt dann wegen (2.2.1-7b)

2.3.1o-2a) $\frac{1}{b_2} = 0$

bzw. wegen (2.1-14) und (2.1-6c)

2.3.1o-2b) $5\beta_2 - 6\beta_1 - 9 = 0.$

Als Lösung von (2.1-9a) erhält man dann in einem beliebigen Koordinatensystem

2.3.1o-3a) $$y = \begin{cases} y^* \, (x - x_2)^{-s} \, (x_1 - x)^{s} & \text{für } x \in \langle x_2, x_1 \rangle \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei

2.3.1o-3b) $$x_1 = \operatorname{sign}(\mu_3) \frac{\sqrt{\beta_1}(\beta_2+3)}{2(3\beta_1-2\beta_2+6)} + \sqrt{\frac{\beta_1(\beta_2+3)^2+4(4\beta_2-3\beta_1)(3\beta_1-2\beta_2+6)}{4(3\beta_1-2\beta_2+6)^2}}\,\mu_1'$$

2.3.1o-3c) $$x_2 = \operatorname{sign}(\mu_3) \frac{\sqrt{\beta_1}(\beta_2+3)}{2(3\beta_1-2\beta_2+6)} - \sqrt{\frac{\beta_1(\beta_2+3)^2+4(4\beta_2-3\beta_1)(3\beta_1-2\beta_2+6)}{4(3\beta_1-2\beta_2+6)^2}}\,\mu_1'$$

2.3.1o-3d) $$s = \operatorname{sign}(\mu_3) \cdot \frac{\sqrt{\beta_1}\,(\beta_2+3)}{(3\beta_1-2\beta_2+6) \cdot (x_1 - x_2)}$$

und

(2.3.1o-3e) $$y^{*} = \frac{1}{(x_1-x_2)} \cdot \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(s+1)\ \Gamma(1-s)} = \frac{1}{(x_1-x_2)} \cdot \frac{\sin(\pi.s)}{\pi.\ s}$$

(Hierzu vergleiche man (2.3.1o-2), (2.2.1-24), (2.2.1-27), (2.2.1-28) und (2.1-14) sowie Anhang A3).

Bzgl. der Intervallgrenzen bei x_1 und x_2 gilt sinngemäß Bemerkung (2.2.1-5).

B E I S P I E L

Beispiel [2.3.1o-B1] : Der PEARSON-Typ 12

Man setze

$$(2.3.1o\text{-}B1\text{-}1)\quad \begin{cases} \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 1 \\ \mu_3 = \sqrt{3} = 1{,}732 \\ \mu_4 = 5{,}4. \end{cases}$$

Dann erhält man

$$(2.3.1o\text{-}B1\text{-}2)\quad \varkappa = -1,$$

$$(2.3.1o\text{-}B1\text{-}3a)\quad s_1 = o{,}71$$

und

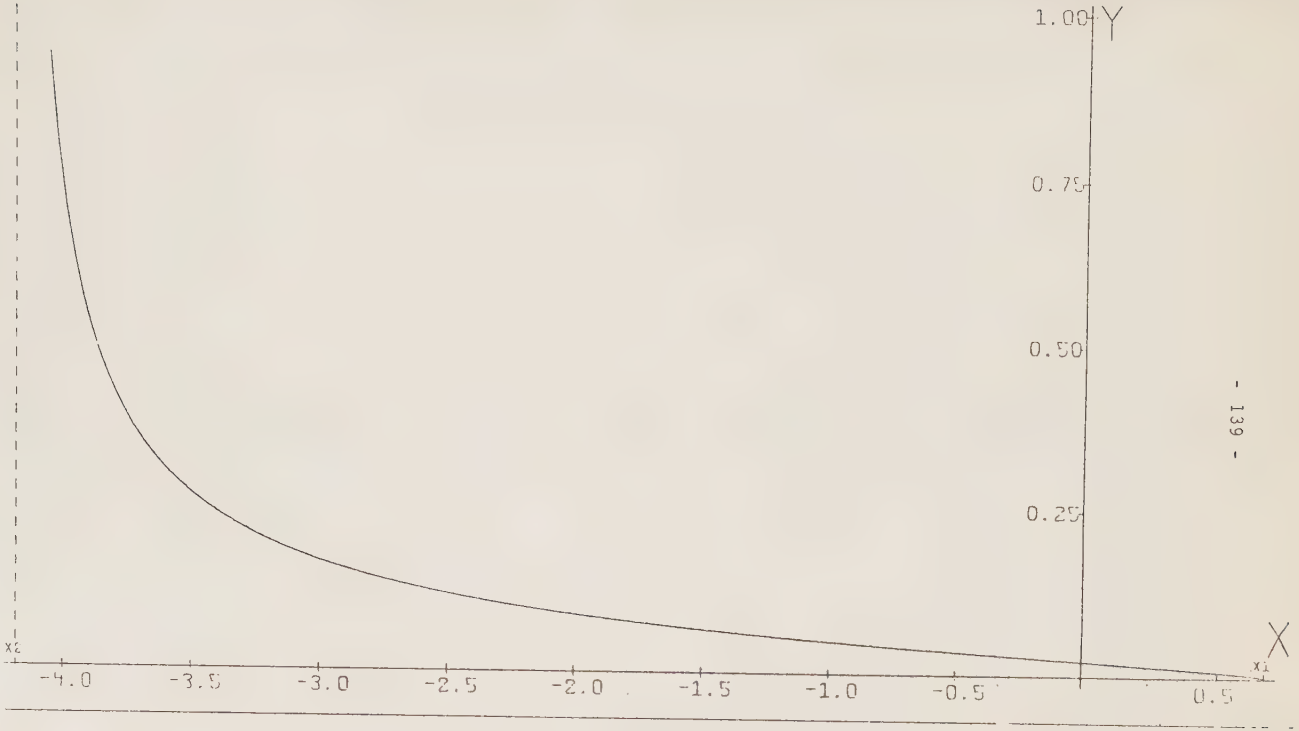
$$(2.3.1o\text{-}B1\text{-}3b)\quad s_2 = -o{,}71 \quad (\text{vgl. } (2.2.1\text{-}4d, e))$$

und somit als Dichtefunktion

$$(2.3.1o\text{-}B1\text{-}4)\quad f(x) = 7{,}31 \cdot 1o^{-2} (x + 4{,}18)^{-o{,}71} (o{,}72 - x)^{o{,}71}$$

$$\text{für } x \in (-4{,}18,\ o{,}72].$$

Hierzu vergleiche man nachstehende Zeichnung [2.3.1o-Z1].



Zeichnung 2.3.10.1-Z1

PEARSONTYP 12

2.4 Zusammenfassung

In der folgenden Tabelle [2.4-T1] sind die einzelnen PEARSON-Typen zusammengefaßt:

Tabelle [2.4 -T1]: Die PEARSON-Typen

A) Die PEARSONschen Haupttypen

Typ	Dichtefunktion	Definitions-bereich	Parameterwerte Referenzformel	Definition	Bemerkungen
I bzw.1	$y=y^*(x-x_2)^{s2}(x_1-x)^{s1}$	$x \in \langle x_2, x_1 \rangle$	(2.2.1-4)	$\varkappa < 0$	
II bzw.4	$y=y^*((x-r)^2+q^2)^{-s}\exp(-\nu.\arctan(\frac{x-r}{q}))$	$x \in (-\infty, \infty)$	(2.2.2-6)	$0 < \varkappa < 1$	
III(R)bzw.6(R)	$y=y_R^*(x-x_1)^{s1}(x-x_2)^{s2}$	$x \in \langle x_1, \infty)$	(2.2.3.1-4)	$\varkappa > 1, \mu_3 > 0$	
III(L)bzw.6(L)	$y=y_L^*(x_1-x)^{s1}(x_2-x)^{s2}$	$x \in (-\infty, x_2 \rangle$	(2.2.3.2-4)	$\varkappa > 1, \mu_3 < 0$	

B) Die PEARSONschen Spezialtypen

B1) Die Grenz- bzw. Obergangstypen

Typ	Dichtefunktion	Definitions-bereich	Parameterwerte Referenzformel	Definition	Bemerkungen
0	$y=y^{*}.\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})$	$x\in(-\infty,\infty)$	(2.3.1-4)	$b_2=0, b_1=0, b_0<0$ (bzw. $\beta_1=0, \beta_2=3$)	Grenztyp der Haupttypen I, II und III sowie der Typen 2, 3, 5 und 7
2	$y=y^{*}(x-x_2)^{s}(x_1-x)^{s}$	$x\in\langle x_2,x_1\rangle$	(2.3.2-3)	$\mathcal{K}=0,\ 1<\beta_2<3$	Grenztyp von Haupttyp I
3(R)	$y=y_R^{*}\,e^{-\gamma x}(x-x_1)^{\gamma c}$	$x\in\langle x_1,\infty)$	(2.3.1-3)	$b_2=0, \mu_3>0$	Obergangstyp zwischen den Haupttypen I und III
3(L)	$y=y_L^{*}\,e^{-\gamma x}(x_1-x)^{\gamma c}$	$x\in(-\infty,x_1\rangle$	(2.3.3.2-2)	$b_2=0, \mu_3<0$	
5(R)	$y=y_R^{*}(x-x_1)^{c}\exp(-\frac{\nu}{x-x_1})$	$x\in(x_1,\infty)$	(2.3.4.1-3)	$\mathcal{K}=1, \mu_3>0$	Obergangstyp zwischen den Haupttypen II und III
5(L)	$y=y_L^{*}(x_1-x)^{c}\exp(-\frac{\nu}{x_1-x})$	$x\in(-\infty,x_1)$	(2.3.4.2-2)	$\mathcal{K}=1, \mu_3<0$	
7	$y=y^{*}((x-r)^2+q^2)^{-s}$	$x\in(-\infty,\infty)$	(2.3.5-4)	$\mathcal{K}=0, \beta_2>3$	Grenztyp von Haupttyp II

B2) Die sonstigen Spezialtypen

Typ	Dichtefunktion	Definitions-bereich	Parameterwerte Referenzformel	Definition	Bemerkungen
8(R)	$y=y_R^*(x-x_2)^{s2}$	$x \in (x_2, x_1]$	(2.3.6.1-2)	$\varkappa<0, s_1=0, s_2<0$	Spezialfall von HaupttypI
8(L)	$y=y_L^*(x_1-x)^{s1}$	$x \in [x_2, x_1)$	(2.3.6.2-2)	$\varkappa<0, s_2=0, s_1<0$	
9(R)	$y=y_R^*(x-x_2)^{s2}$	$x \in [x_2, x_1]$	(2.3.7.1-2)	$\varkappa<0, s_1=0, s_2>0$	Spezialfall von Haupt-typ I
9(L)	$y=y_L^*(x_1-x)^{s1}$	$x \in [x_2, x_1]$	(2.3.7.2-2)	$\varkappa<0, s_2=0, s_1>0$	
10(R)	$y=y_R^* e^{-\gamma x}$	$x \in [x_1, \infty)$	(2.3.8.1-3)	$b_2=0, \mu_3>0, a=\frac{b_0}{b_1}$	Spezialfall von Typ 3
10(L)	$y=y_L^* e^{-\gamma x}$	$x \in (-\infty, x_1]$	(2.3.8.2-3)	$b_2=0, \mu_3<0, a=\frac{b_0}{b_1}$	
11(R)	$y=y_R^*(x-x_2)^{s2}$	$x \in [x_1, \infty)$	(2.3.9.1-2)	$\varkappa>1, \mu_3>0, s_1=0$	Spezialfall von Haupt-typ III
11(L)	$y=y_L^*(x_1-x)^{s1}$	$x \in (-\infty, x_2]$	(2.3.9.2-2)	$\varkappa>1, \mu_3<0, s_2=0$	
12	$y=y^*(x-x_2)^{-s}(x_1-x)^s$	$x \in \langle x_2, x_1 \rangle$	(2.3.10-3)	$\varkappa<0, s_1=-s_2$	Spezialfall von Haupt-typ I

Betrachten wir unser spezielles Koordinatensystem mit Mittelwert im Ursprung und setzen wir

(2.4-1a) $$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

und

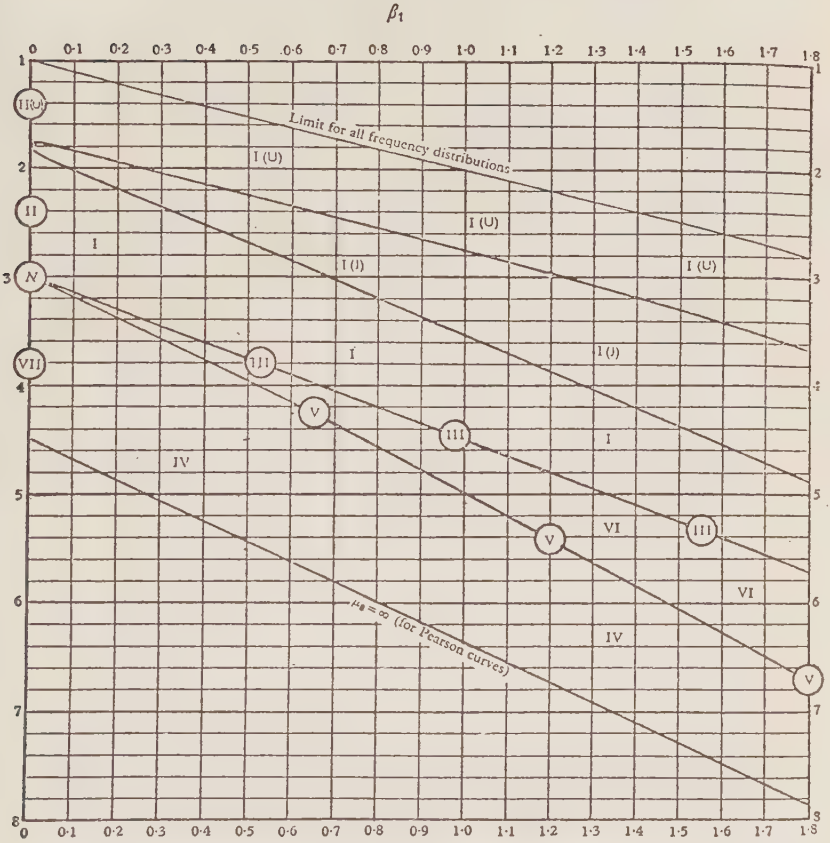
(2.4-1b) $$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad ,$$

so lassen sich die PEARSON-Typen 0 bis 7 in der von β_1 und β_2 aufgespannten Ebene durch bestimmte Bereiche definieren, die sich aus der folgenden Zeichnung [2.4-Z1] ergeben[1]. Zur Herleitung der jeweiligen Begrenzungslinien vergleiche man 2.2 und 2.3.

---

1) Diese Zeichnung wurde aus [12], S. 21o übernommen

Zeichnung [2.4-ZI]: Darstellung der wichtigsten PEARSON-Typen in der (β_1, β_2)-Ebene



Gleichungen für die Begrenzungskurven :

Begrenzungslinie für alle Dichtefunktionen :

$$\beta_2 - \beta_1 - 1 = 0$$

Begrenzungskurve für den I(J)-Bereich :

$$4(4\beta_2 - 3\beta_1)(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)^2 = \beta_1(\beta_2 + 3)^2(8\beta_2 - 9\beta_1 - 12)$$

Typ 3-Linie :

$$2\beta_2 - 3\beta_1 - 6 = 0$$

Typ 5-Linie :

$$\beta_1(\beta_2 + 3)^2 = 4(4\beta_2 - 3\beta_1)(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)$$

3. Approximation von empirisch ermittelten Häufigkeitsverteilungen durch PEARSON-Funktionen

Für eine eindimensionale kontinuierliche Zufallsvariable mit unbekannter Verteilung liege eine Stichprobe von n unabhängigen Beobachtungen

(3-1) $\xi_j \quad (j = 1,\ldots, n)$

vor, und wir nehmen an, daß der Definitionsbereich der von uns betrachteten Zufallsvariable in s paarweise disjunkte Intervalle

(3-2a) $< x_{i-1}, x_i >$

aufgeteilt worden sei und entsprechend unsere n Beobachtungen in s Gruppen zusammengefaßt seien mit Häufigkeiten

(3-2b) $h_i \qquad (i = 1,\ldots, s)$,

wobei

(3-3) $$\sum_{i=1}^{s} h_i = n \ .$$

Anhand einer so gem. (3-2) vorgegebenen empirisch ermittelten Häufigkeitsverteilung soll nun untersucht werden, ob es sich bei der unbekannten Verteilung der von uns betrachteten Zufallsvariablen um eine PEARSON-Verteilung handeln kann, wobei dann zusätzlich noch der Typ und dessen Parameterwerte zu spezifizieren sind.

Im folgenden werden wir uns bemühen, auf diese Frage eine Antwort zu finden, indem wir versuchen, die gem. (3-2) vorgegebene Häufigkeitsverteilung durch eine Funktion aus dem PEARSON-System möglichst gut zu approximieren.

Dazu ist zunächst anhand der Kurvenform der vorgegebenen Häufigkeitsverteilung die Vorentscheidung zu treffen, ob sich überhaupt eine Approximation durch eine PEARSON-Funktion empfiehlt.

Wie wir in 2 gesehen haben, sind die PEARSON-Funktionen entweder unimodal oder J-förmig oder U-förmig. Unsere Häufigkeitsverteilung muß somit zumindest einigermaßen eine solche Kurvenform aufweisen, wobei wir das "einigermaßen" so interpretieren, daß wir nur solche Abweichungen von diesen geforderten Kurvenformen akzeptieren, die sich durch Zufallsschwankungen bei den Besetzungszahlen für die einzelnen Intervalle unserer Häufigkeitsverteilung erklären lassen. So ist es z.B. wenig sinnvoll, den Versuch zu unternehmen, eine ausgeprägt bimodale Häufigkeitsverteilung durch eine PEARSON-Funktion zu approximieren.

Für unsere folgenden Betrachtungen setzen wir nun voraus, daß die Kurvenform der gem. (3-2) vorgegebenen Häufigkeitsverteilung eine mögliche Approximation durch eine PEARSON-Funktion nicht ausschließt.

Dann ist ein geeigneter Kurventyp aus dem System auszuwählen, und es sind seine Parameter zu schätzen.

Anschließend ist die Approximationsgüte zu beurteilen und, soweit es möglich ist, zu testen, ob die unbekannte Verteilung der von uns betrachteten Zufallsvariable durch die ermittelte PEARSON-Funktion erklärt werden kann.

In 3.1 und 3.2.3 werden wir die gebräuchlichsten Schätzmethoden darstellen, während wir in 3.2 Anpassungstests besprechen. In 3.3 werden wir dann auf Schwierigkeiten bei der Anwendung dieser Methoden und Tests eingehen, sowie die Vorgehensweise erläutern, die für die Berechnungen im praktischen Teil dieser Arbeit gewählt wurde.

Zu den in 3.1 und 3.2 dargestellten Methoden und Tests sei dabei noch angemerkt, daß diese nicht nur in Zusammenhang mit dem PEARSON-System,sondern auch mit anderen Verteilungen Anwendung finden.

3.1 Methoden zur Ermittlung eines geeigneten PEARSON-Typs und zur Schätzung seiner Parameter

Im folgenden werden wir die gebräuchlichsten Methoden zur Ermittlung eines geeigneten PEARSON-Typs und zur Schätzung seiner Parameter darstellen, und zwar

(i) die Momentenmethode,
(ii) die Maximum-Likelihood-Methode,
(iii) die Quantils- oder Anordnungsmethode,
(iv) die Häufigkeitsmomentenmethode
und
(v) die χ^2-Minimum-Methode.

(i) - (iv) werden wir in 3.1.1 - 3.1.4 behandeln; auf (v) werden wir in 3.2.3 eingehen.

Unsere Darstellung lehnt sich z.T. an eine entsprechende Darstellung in [2] an, wo man auch noch weitergehende Hinweise bzgl. der Anwendungsmöglichkeiten und Eigenschaften dieser Methoden findet.

Ferner sei noch darauf hingewiesen, daß man sich oft auch gewisser Kombinationen dieser Methoden bedient.

3.1.1 Die Momentenmethode

Bei dieser Methode, die auf K. PEARSON (vgl. [1], S. 12ff) zurückgeht, berechnet man zunächst anhand der vorgegebenen Stichprobe der betrachteten Zufallsvariablen Schätzungen für die ersten vier Momente.

Liegt dabei die Stichprobe in der Form (3-1), d.h. in Einzelmessungen, vor, so erhält man die Momentenschätzungen anhand von

$$(3.1.1\text{-}1)\qquad \hat{\mu}'_r = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_j^r \qquad (r = 1, 2, 3, 4);$$

liegt die Stichprobe in der Form (3-2), d.h. in gruppierter Form, vor, so erhält man diese Schätzungen üblicherweise mittels

$$(3.1.1\text{-}2a)\qquad \hat{\mu}'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s} \xi_i^r \, h_i \,,$$

wobei

$$(3.1.1\text{-}2b)\qquad \xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$$

geeignet zu wählen ist.

Oft wählt man für ξ_i die jeweilige Intervallmitte, d.h.

$$(3.1.1\text{-}3)\qquad \xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \,.$$

Statt (3.1.1-2) kann man auch die folgende Schätzformel betrachten

(3.1.1-4a) $\hat{\mu}'_r = \int_{x_0}^{x_s} x^r \cdot t(x)\, dx$

wobei t(x) definiert ist durch

(3.1.1-4b) $t(x) = \frac{h_i}{n(x_i - x_{i-1})}$ für $x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ $\quad (i = 1,\ldots,s)$.

Um große Rechenungenauigkeiten zu vermeiden, empfiehlt es sich, nach Schätzung des 1. Moments μ'_1 die zugehörigen zentralen Momente μ_r ($r \geq 2$) zu schätzen.

Die Ermittlung von deren Schätzwerten ist ohnehin erforderlich, da man mit deren Hilfe Schätzwerte für die Definitionsvariablen $\varkappa, \beta_1$ und β_2 (vgl. (2.1-12), (2.1-6b)) berechnet, die es dann ermöglichen, den passenden Kurventyp aus dem PEARSON-System auszuwählen. Anschließend berechnet man Schätzungen für dessen Parameterwerte mittels der in 2.2 bzw. 2.3 angegebenen Formeln (vgl. auch Tabelle [2.4-T1]), indem man in die dortigen Bestimmungsgleichungen die Momentenschätzwerte einsetzt.

Mit Hilfe der Momentenmethode gewonnene Schätzungen für die Parameter von PEARSON-Funktionen sind asymptotisch normal verteilt, wobei die Standardabweichung einer solchen Schätzung asymptotisch gleich $c/\sqrt{n}$ wird.

Ein Nachteil der Momentenmethode besteht darin, daß die mit ihr gewonnenen Schätzungen auch im asymptotischen Fall bis auf wenige Ausnahmen weniger wirksam sind als mit Hilfe anderer Schätzmethoden gewonnene Schätzungen.

Hierzu vergleiche man [2], [15] und [16].

3.1.2 Die Maximum-Likelihood-Methode

Diese Methode, die auf R.A. FISHER zurückgeht (vgl. [16], S. 512), läßt sich anwenden, wenn man bereits über eine gewisse Kenntnis - z.B. auf Grund von Schätzungen für die Definitionsvariablen des PEARSON-Systems anhand der Momentenmethode - verfügt, welcher Kurventyp aus dem PEARSON-System zur Approximation der vorgegebenen Daten herangezogen werden soll.

Mit Hilfe der ML-Methode lassen sich dann wie folgt Bestimmungsgleichungen für die Parameter p_m (m = 1,..., k) des ausgewählten Kurventyps herleiten.

Zunächst nehmen wir an, daß unsere Stichprobe gem. (3-1) gegeben sei.

Dann betrachten wir die Likelihoodfunktion

$$(3.1.2\text{-}1a) \quad L(p_1,\ldots,p_k \mid \xi_1,\ldots,\xi_n) = \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i \mid p_1,\ldots,p_k)$$

oder deren Logarithmus

$$(3.1.2\text{-}1b) \quad l(p_1,\ldots,p_k \mid \xi_1,\ldots,\xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(\xi_1 \mid p_1,\ldots,p_k).$$

Partielle Differentiation von (3.1.2-1a) bzw. (3.1.2-1b) nach den einzelnen Parametern p_m (m = 1,...,k) und Nullsetzen der jeweiligen partiellen Ableitung ergibt dann k Bestimmungsgleichungen für die k Parameter p_m

$$(3.1.2\text{-}2a) \quad \frac{\partial L}{\partial p_m} = 0$$

bzw.

$$(3.1.2\text{-}2b) \quad \frac{\partial l}{\partial p_m} = 0 \qquad (m = 1,\ldots,k).$$

Anhand dieser Bestimmungsgleichungen erhält man Schätzungen $\hat{p}_m$ für die einzelnen Parameter p_m des ausgewählten Kurventyps.

Diese Vorgehensweise kann sich u.U. als kompliziert und aufwendig erweisen, wenn sich obige Bestimmungsgleichungen (3.1.2-2) nicht explizit nach den einzelnen Parametern auflösen lassen.

Eine weitere, noch unangenehmere Komplikation tritt auf, wenn die vorgegebene Stichprobe lediglich in gruppierter Form, d.h. gem. (3-2), vorliegt. Dann sind die Parameter p_m anhand der folgenden Likelihoodfunktion (vgl. [16], S 512)

$$(3.1.2\text{-}3a)\quad L\,(p_1,\ldots,p_k \mid h_1,\ldots,h_s;\ <x_0,x_1>,\ \ldots,\ <x_{s-1},x_s>) = \prod_{i=1}^{s} \pi_i^{h_i} \quad (p_1,\ldots,p_k)$$

zu schätzen, wobei

$$(3.1.2\text{-}3b)\quad \pi_i\ (p_1,\ldots,p_k) = F\,(x_i \mid p_1,\ldots p_k) - F\,(x_{i-1} \mid p_1,\ldots p_k)$$

mit

$$(3.1.2\text{-}3c)\quad F\,(x_i \mid p_1,\ldots,p_k) = \int_{-\infty}^{x_i} f(x \mid p_1,\ldots p_k)\,dx.$$

Mit Hilfe der ML-Methode gewonnene Schätzungen für die Parameter von PEARSON-Funktionen sind unter gewissen Bedingungen[1] asymptotisch normal verteilt und asymptotisch effizient (vgl. [2], [16], [15]), wenn die vor-

---

1) vgl. [15], S. 5ooff

gegebene Stichprobe in der Form (3-1) vorliegt. Im Falle von (3-2) sind die Schätzungen nicht notwendigerweise konsistent, und es sind deshalb Korrekturen bei den Schätzwerten vorzunehmen (vgl. [2], S 11 und (3.2.3)).

3.1.3 Die Quantils- bzw. Anordnungsmethode

Diese Methode nutzt die Tatsache aus, daß die PEARSON-Funktionen in standardisierter Form tabelliert sind[1].

Unsere vorgegebene Stichprobe gem. (3-1) bzw. (3-2) liege in standardisierter Form vor. Ist dann die Stichprobe gem. (3-1) vorgegeben, so denke man sich die ξ_j ($j = 1,\ldots,n$) der Größe nach geordnet. Durch Kumulation erhält man dann eine Folge von p%-Quantilswerten $q(p)$.

Liegt die Stichprobe in gruppierter Form gem. (3-2) vor, so erhält man bei Obergang zur kumulativen Häufigkeitsverteilung mit den Randpunkten x_i der jeweiligen Teilintervalle gem. (3-2a) ebenfalls Quantilswerte $q(p_i)$, wobei

$$p_i = \sum_{j=1}^{i} h_j \quad . \tag{3.1.3-1}$$

Anhand der erhaltenen Quantilswerte im standardisierten Koordinatensystem lassen sich Schätzungen für die Definitionsparameter β_1 und β_2 gem. (2.1-6b) des PEARSON-Systems anhand von Tabelle 32 in [12], II ermitteln.

Mit Hilfe der Schätzwerte $\hat{\beta}_1$ und $\hat{\beta}_2$ lassen sich dann anhand der entsprechenden Formeln in 2.2 und 2.3 Schätzwerte für die Parameter des in der angesprochenen Tabelle beim Wertepaar $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ angegebenen PEARSON-Typs ermitteln.

Bei bestimmten Funktionstypen lassen sich bestimmte Parameter auch anhand verteilungsspezifischer Beziehungen

---

1) vgl. [12], II, Tabelle 32

zwischen bestimmten Quantilswerten und diesen Parametern schätzen.

So gelten für die Parameter der Normalverteilung (PEARSON-Typ 0) die beiden folgenden Beziehungen (vgl. [2], S.15)

(3.1.3-2a) $q\ (0{,}5) = \mu$

und

(3.1.3-2b) $q\ (0{,}75) - q\ (0{,}25) = 1{,}349 \cdot \sigma$.

Die mit Hilfe dieser Methode gewonnenen Schätzungen sind nach Ord (vgl. [2], S. 15) ausreichend effizient.

3.1.4 Die Häufigkeitsmomentenmethode

Wir definieren als r-tes Häufigkeitsmoment von f(x) den Ausdruck

(3.1.4-1) $$\omega_r = \int_{x \in D} (f(x))^r \, dx,$$

sofern dieses Integral existiert.

Für bestimmte Dichtefunktionen lassen sich Beziehungen zwischen den Parametern von f(x) und gewissen Häufigkeitsmomenten herleiten.

So gilt z.B. (vgl. [20]) für die Normalverteilung

(3.1.4-2a) $$y = \frac{n}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

die Beziehung

(3.1.4-2b) $$y^2 = \frac{n^2}{2\sigma\sqrt{\pi}} \; \frac{1}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{x^2}{2(\sigma/\sqrt{2})^2}} .$$

Aus (3.1.4-2b) erhält man durch Integration das 2. Häufigkeitsmoment

(3.1.4-3) $$\omega_2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \, dx = \frac{n^2}{2\sigma\sqrt{\pi}} .$$

Liegt unsere vorgegebene Stichprobe in der Form (3-2) vor, so erhält man einen Schätzwert für ω_2 durch

(3.1.4-4) $$\hat{\omega}_2 = \sum_{i=1}^{s} h_i^2 \quad .$$

Aus (3.1.4-3) läßt sich dann der Parameter schätzen durch

(3.1.4-5) $$\hat{\sigma} = \frac{n^2}{2\,\hat{\omega}_2\sqrt{\pi}} \quad .$$

Weitere Einzelheiten bzgl. dieser wenig gebräuchlichen Schätzmethode im Zusammenhang mit dem PEARSON-System findet man in [2], S 17ff, [20], [21] und [22].

3.2. Anpassungstests

Wir betrachten eine Zufallsvariable X mit unbekannter Verteilung und stellen die Hypothese H_0 auf, daß es sich bei der unbekannten Verteilung um eine ganz bestimmte (theoretische) Verteilung mit bestimmten Parameterwerten handelt. Für die betrachtete Zufallsvariable liege eine Stichprobe vom Umfang n gem. (3-2) (empirische Häufigkeitsverteilung) vor, und es ist nun zu entscheiden, ob die Hypothese H_0 angenommen werden kann. Dies geschieht mit Hilfe eines Anpassungstests, der i.a. so aufgebaut ist, daß anhand des Wertes einer Testvariablen, die den "Abstand" zwischen der angenommenen theoretischen und der empirisch ermittelten Verteilung mißt, entschieden wird, ob die Hypothese H_0 möglich ist oder verworfen werden soll.

Im 3.2.1 und 3.2.2 werden wir die beiden wichtigsten Anpassungstests, den χ^2-Test und den KOLMOGOROFF-SMIRNOW-Test, besprechen und dann in 3.2.3 auf eine Modifikation des χ^2-Tests eingehen.

3.2.1 Der χ^2-Test

Wir beschränken uns auf den Fall, daß eine empirische Häufigkeitsverteilung gem. (3-2) vorliege. Den einzelnen Intervallen $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ gem. (3-2a) lassen sich dann aufgrund unserer Hypothese H_0 "theoretische" Häufigkeiten $n \cdot \tilde{\pi}_i$ $(i = 1,\ldots,s)$ zuordnen.

Im Einklang mit dem Prinzip der kleinsten Quadrate betrachtet man den Ausdruck

(3.2.1-1a) $$X^2 = \sum_{i=1}^{s} c_i \left(\frac{h_i}{n} - \tilde{\pi}_i\right)^2$$

und wählt nach K. PEARSON

(3.2.1-1b) $$c_i = \frac{n}{\tilde{\pi}_i} .$$

Dann läßt sich für $n \to \infty$ zeigen, daß

(3.2.1-2) $$X_0^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(h_i - n\tilde{\pi}_i)^2}{n\tilde{\pi}_i} .$$

χ^2-verteilt ist mit s - 1 Freiheitsgraden (vgl. [15], S 416ff).

Will man nun prüfen, ob die Hypothese H_0 über die unbekannte Verteilung der betrachteten Zufallsvariable angenommen werden kann oder zu verwerfen ist, so bestimmt man unter Berücksichtigung der vorliegenden Zahl von Freiheitsgraden zu einer vorzugebenden Signifikanzzahl (Irrtumswahrscheinlichkeit) α die zugehörige Schranke $\chi^2_{krit}(\alpha)$ aus einer Tabelle der χ^2-Verteilung mittels der Gleichung

(3.2.1-3) $$P(\chi^2 \leq \chi^2_{krit}) = 1 - \alpha$$

und entscheidet sich folgendermaßen:

Wenn

(3.2.1-4a) $X_0^2 \leq \chi^2_{krit}(\alpha)$ ist,

so nimmt man die Hypothese H_0 an; falls

(3.2.1-4b) $X_0^2 > \chi^2_{krit}(\alpha)$,

so wird H_0 verworfen.

Oblicherweise wählt man

(3.2.1-5) $\alpha = 0{,}05$

und macht bei Ablehnung von H_0 noch folgende Unterschiede:

Falls

(3.2.1-6a) $\chi^2_{krit}(\alpha = 0{,}05) < X_0^2 \leq \chi^2_{krit}(\alpha = 0{,}01)$,

so wird die Hypothese H_0 abgelehnt und man spricht von einer einfachen Abweichung von H_0;
falls

(3.2.1-6b) $\chi^2_{krit}(\alpha = 0{,}01) < X_0^2 \leq \chi^2_{krit}(\alpha = 0{,}001)$,

so wird H_0 abgelehnt und man spricht von einer signifikanten Abweichung;
falls

(3.2.1-6c) $X_0^2 > \chi^2_{krit}(\alpha = 0{,}001)$,

so wird H_0 abgelehnt und man spricht von einer äußerst signifikanten Abweichung.

Da X_0^2 gem. (3.2.1-2) lediglich asymptotisch χ^2-verteilt ist, wird bei Anwendung des χ^2-Tests gefordert, daß

(3.2.1-7a) $n \geqslant 30$

und

(3.2.1-7b) $\min(h_i) \geqslant 5$ (vgl. [23], S. 230);

statt (3.2.1-7b) wird zuweilen auch

(3.2.1-7c) $h_i \geqslant 10$ im Mittel

und

(3.2.1-7d) $\min(n \cdot \pi_i) \geqslant 10$

gefordert (vgl. [16], S. 511).

Gewisse Probleme stellen sich, wenn die vorgegebene Stichprobe lediglich in gruppierter Form, d.h. als Häufigkeitsverteilung gem. (3-2) vorliegt.

In diesem Fall lassen sich die Schätzungen der Momente u.U. durch Momentenkorrekturen verbessern. Hierzu seien die Verfahren zur Momentenkorrektur nach SHEPPARD (vgl. [15], S. 361) und nach PAIRMAN und PEARSON (vgl. [17]), genannt, wobei das zweite das erste in sich einschließt. Eine Variante des ersten Verfahrens stammt von KUPPERMAN, eine Variante des zweiten von PEARSE (vgl. [18], [19]). Alle diese Verfahren setzen eine äquidistante Klasseneinteilung bei (3-2a) voraus, so daß sich eine Momentenkorrektur bei nicht äquidistanten Klassen als schwierig erweist.

Für die Durchführung des χ^2-Tests ist es besonders günstig, wenn eine Zerlegung des Definitionsbereiches der empirischen Verteilung in Intervalle mit in etwa jeweils gleichen Häufigkeiten vorliegt (vgl. [16], S. 511 und [32]).

3.2.2 Der KOLMOGOROFF-SMIRNOW-Test

Sei $F_0(x)$ die zu testende theoretische Verteilungsfunktion.

Sei $S_n(x)$ die durch (3-1) bzw. (3-2) bestimmte empirische Verteilungsfunktion.

Man definiert als Testvariable des darzustellenden Tests

$$D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} \left| F_0(x) - S_n(x) \right| . \tag{3.2.2-1}$$

Man kann zeigen, daß die Verteilung von D_n im Falle, daß H_0 gilt, unabhängig von $F_0(x)$ ist und für $n \to \infty$ gegen die KOLMOGOROFF-SMIRNOWsche λ-Verteilung konvergiert (vgl. [16], S.517).

Bei diesem Test wählt man nun aus einer Tafel der λ-Verteilung zu einer vorzugebenden Signifikanzzahl (Irrtumswahrscheinlichkeit) α die zugehörige kritische Schranke $\lambda_{krit}(\alpha)$ mittelt

$$P\left(\lambda \leq \lambda_{krit}(\alpha)\right) = 1 - \alpha . \tag{3.2.2-2}$$

Gilt dann für D_n

$$D_n \leq \frac{\lambda_{krit}(\alpha)}{\sqrt{n}} , \tag{3.2.2-3a}$$

so wird die Hypothese H_0, daß es sich bei der unbekannten Verteilung um die durch $F_0(x)$ gegebene Verteilung handeln kann, angenommen;

falls

(3.2.2-3b) $$D_n > \frac{\lambda_{krit}(\alpha)}{\sqrt{n}} \quad ,$$

so wird H_0 abgelehnt.
Zur Wahl von α vergleiche man 3.2.1.

Nach [16], S. 518 hat GICHMAN gezeigt, daß D_n gem. (3.2.2-1) nicht in der angegebenen Weise verteilt sein muß, wenn für die angesetzte Verteilungsfunktion $F_0(x)$ noch aus der vorgegebenen Stichprobe Parameter zu schätzen sind.

Ferner hat GICHMAN für den Fall gruppierter Daten gem. (3-2) festgestellt, wie ebenfalls in [16], S. 518 vermerkt wird, daß D_n eigentlich nur dann für $n \to \infty$ eine KOLMOGOROFF-SMIRNOWsche λ-Verteilung vorliegt, wenn die Länge der Gruppierungsintervalle gleichmäßig gegen Null geht. Somit sollte also der KOLMOGOROFF-SMIRNOW-Test nur dann angewandt werden, wenn alle Gruppierungsintervalle einigermaßen klein sind bei einer ausreichend großen Zahl von Intervallen.

3.2.3 Der χ^2-Test bei zu schätzenden Parametern für die hypothetische Verteilung und die χ^2-Minimum-Methode

Im Gegensatz zu 3.2.1 und 3.2.2 lassen wir es nun in unserer Nullhypothese H_0 offen, welche Werte die Parameter der in H_0 vermuteten Verteilung besitzen, d.h. wir lassen zu, daß die theoretischen Wahrscheinlichkeiten auf den Intervallen $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ gem. (3.2a) noch von Parametern p_m $(m = 1,\ldots,k;\ k < s)$ abhängen.

(3.2.3-1) $$\tilde{\pi}_i = \tilde{\pi}_i\,(p_1,\ldots p_k) \qquad (i = 1,\ldots,s).$$

Analog zu (3.2.1-2) betrachten wir als Testvariable

(3.2.3-2) $$X_0^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(h_i - n\,\tilde{\pi}_i\,(p_1,\ldots,p_k))^2}{n\cdot\tilde{\pi}_i\,(p_1,\ldots,p_k)} \quad .$$

Im Unterschied zu 3.2.1 sind nun zunächst die Parameter der in H_0 festgelegten Verteilung aus einer vorgegebenen Stichprobe der betrachteten Zufallsvariable zu schätzen, und erst dann ist anhand des Wertes der betrachteten Testvariable zu entscheiden, ob die Hypothese H_0 (inklusive der geschätzten Parameterwerte) möglich ist. Um letzteres tun zu können, ist es erforderlich, einen Aufschluß über die (Grenz-) Verteilung von X_0^2 gem. (3.2.3-2) zu erhalten.

Hierzu seien folgende wichtige Fakten zusammengestellt[1]:

Wesentlich für die Grenzverteilung von X_0^2 sind die stochastischen Eigenschaften der Schätzungen für die Parameter p_m der in H_0 vermuteten Verteilung.

---

1) vgl. [3], [15] und [16]

In [15], S. 424ff wird gezeigt, daß X_0^2 gem. (3.2.3-2) asymptotisch χ^2-verteilt ist mit s - k - 1 Freiheitsgraden, wenn die Parameterschätzungen für die hypothetische Verteilung im wesentlichen die Eigenschaft

$$\tilde{n}_i(\hat{p}_1,\ldots,\hat{p}_k) - \tilde{n}_i(p_1,\ldots,p_k) = o(\sqrt{n}) \tag{3.2.3-3}$$

haben (vgl.auch [3], II, S.423 ff)

Hinreichend für (3.2.3-3) ist z.B., daß die genannten Parameterschätzungen asymptotisch normal und asymptotisch effizient sind.

Ob nun (3.2.3-3) erfüllt ist oder nicht, hängt wesentlich ab von der verwendeten Schätzmethode für die betrachteten Parameter.

Hinreichend gute Schätzwerte liefert die auf NEYMAN und E.S. PEARSON zurückgehende χ^2-MINIMUM-METHODE[1].

Ausgehend von X_0^2 gem. (3.2.3-2) ergeben sich nach dieser χ^2-Minimum-Methode Schätzwerte für die Parameter p_m (m = 1,...,k) der hypothetischen Verteilung aus dem Gleichungssystem

$$\frac{\partial X_0^2}{\partial p_m} = -2\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{h_i - n\tilde{n}_i}{\tilde{n}_i} + \frac{(h_i - n\tilde{n}_i)^2}{2n\tilde{n}_i}\right)\frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial p_m} = 0 \tag{3.2.3-4}$$

$$(m = 1,\ldots,k;\ k < s).$$

Mit Hilfe dieser Methode ermittelte Parameterschätzungen sind asymptotisch normal und asymptotisch effizient.

---

1) vgl. [15], S. 425

Obige Schätzmethode erweist sich allerdings i.a. in der Praxis als äußerst beschwerlich, so daß man statt (3.2.3-4) häufig nach der sogen. "modifizierten χ^2-Minimum-Methode" vorgeht, die sich aus (3.2.3-4) durch Vernachlässigung des zweiten Summanden in der Summe von (3.2.3-4) ergibt - was sich i.a. rechtfertigen läßt -, so daß sich die entsprechenden Parameterschätzungen aus

$$\text{(3.2.3-5a)} \qquad \sum_{i=1}^{s} \frac{h_i}{\tilde{\pi}_i} \cdot \frac{\partial \tilde{\pi}_i}{\partial p_m} = 0 \qquad (m = 1,\ldots,k;\ k<s)$$

ergeben; hierbei beachte man, daß wegen

$$\text{(3.2.3-5b)} \qquad \sum_{i=1}^{s} \tilde{\pi}_i = 1$$

$$\text{(3.2.3-5c)} \qquad \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \tilde{\pi}_i}{\partial p_m} = 0 \qquad (m = 1,\ldots k;\ \ k<s)$$

gilt.

Diese Methode ist identisch mit der Maximum-Likelihood-Methode für gruppierte Daten, wo man (vgl. 3.1.2) Schätzungen anhand von

$$\text{(3.2.3-6a)} \qquad \frac{\partial L}{\partial p_m} = 0 \qquad\qquad (m = 1,\ldots,k)$$

erhält, wobei

$$\text{(3.2.3-6b)} \qquad L = \tilde{\pi}_1^{h_1} \cdot \tilde{\pi}_2^{h_2} \cdot \ldots \cdot \tilde{\pi}_s^{h_s} \quad .$$

In [3], II, S. 43o wird gezeigt, daß die Grenzverteilung von X_0^2 gem. (3.2.3-2) bei Parameterschätzungen mit Hilfe von (3.2.3-5) i.a. ebenfalls eine χ^2-Verteilung mit s - k - 1 Freiheitsgraden ist, daß es jedoch auch vorkommen kann, daß es sich um eine χ^2-Verteilung mit s - 1 Freiheitsgraden handelt, was bei einer einigermaßen großen Klassenzahl s nicht so sehr ins Gewicht fällt[1].

---

1) hierzu vgl. auch [2], S. 11

Eine noch größere Vorsicht ist geboten, wenn man für X_0^2 eine χ^2-Verteilung mit s - k - 1 Freiheitsgraden annimmt und die Parameter der hypothetischen Verteilung nach einer anderen Methode geschätzt hat.

In solchen Fällen empfiehlt es sich, bei einer anhand des Wertes von X_0^2 gem. (3.2.3-2) in Analogie zu 3.2.1 zu treffenden Entscheidung über die Annahme oder Ablehnung der Nullhypothese noch zusätzliche Kriterien in Betracht zu ziehen.

Wie in 3.2.1 bereits erwähnt, ist eine Zerlegung des Definitionsbereichs der betrachteten Zufallsvariable in Intervalle mit gleichen theoretischen Häufigkeiten optimal (vgl. [16], S. 513).

3.3. Vorgehensweise in der vorliegenden Untersuchung

Zu Anfang dieses Kapitels sind wir bereits auf die Aufgabenstellung für diese Untersuchung eingegangen, nämlich zu einer vorgegebenen, empirisch ermittelten Häufigkeitsverteilung gem. (3-2) eine (möglichst gute) Approximationsfunktion aus dem PEARSON-System zu finden, wobei vorausgesetzt wird, daß die Kurvenform der vorgegebenen Häufigkeitsverteilung einen solchen Versuch lohnt. Diese Aufgabenstellung ist nun noch insoweit zu präzisieren, als dies mit Hilfe eines EDV-Programms geschehen soll.

In 3.1 und 3.2 haben wir dargestellt, wie zu einer vorgegebenen Häufigkeitsverteilung ein geeigneter PEARSON-Typ ausgewählt werden kann,welches die üblichen Methoden sind, um dessen Parameter zu schätzen, und welches die üblichen Anpassungstests sind, um die Approximationsgüte der ausgewählten PEARSON-Funktion zu beurteilen. Dabei haben wir bereits auf einige Schwierigkeiten hingewiesen, die sich bei der praktischen Anwendung dieser Methoden und Tests ergeben können.

Unser Ziel wird es nun sein, eine für ein EDV-Programm geeignete Schätzmethode zu finden, die zu einer zufriedenstellenden Approximationsgüte führt.

Dabei ist die in 3.1.4 dargestellte Häufigkeitsmomentenmethode wohl am ehesten aus der Reihe der in Frage kommenden Schätzmethoden auszuschließen, da sie sich nur bei ganz speziellen PEARSON-Typen bzw. nur für bestimmte Parameter einzelner Typen eignet.

Die in 3.1.3 dargestellte Quantilsmethode erfordert das Abspeichern von Tabelle 32 aus [12], II und bei einer vor-

gegebenen Häufigkeitsverteilung mit festen Quantilswerten ein recht aufwendiges Interpolieren, da besagte Tabelle nur für sehr wenige Prozentwerte die jeweiligen Abszissenwerte ergibt. Zudem ist eine Standardisierung der vorgegebenen Häufigkeitsverteilung erforderlich. Alles in allem dürfte sich diese Methode nicht besonders gut für eine Anwendung in einem EDV-Programm eignen. Sie war von uns auch deshalb auszuschließen, weil die EDV-Anlage (eine CONTROL DATA 3300), die zu Beginn dieser Untersuchung benutzt wurde, nicht über einen hierzu erforderlichen genügend großen Speicher verfügte.

Was die in 3.1.2 dargestellte Maximum-Likelihood-Methode bzw. die in 3.2.3 dargestellte χ^2- Minimum-Methode angeht, so liefern diese Methoden i.a. zwar zufriedenstellende Parameterschätzungen, sind jedoch vor allem, wenn gruppierte Daten vorliegen, bei den meisten PEARSON-Typen rechentechnisch recht schwierig zu handhaben, da gewisse Bestimmungsgleichungen nicht explizit nach bestimmten Parametern aufgelöst werden können. Insoweit dürften sich auch diese Methoden nicht für ein EDV-Programm eignen.

Verbleibt die in 3.1.1 dargestellte Momentenmethode, die rechentechnisch äußerst einfach ist, jedoch andererseits i.a. erheblich verzerrte Schätzungen besonders für das dritte und das vierte Moment liefert, so daß es oft nicht möglich ist, eine geeignete Approximationsfunktion aus dem PEARSON-System für die vorgegebene Häufigkeitsverteilung zu finden. Eine Verbesserung der Schätzungen und somit eine bessere Approximationsfunktion kann man u.U. erhalten, wenn man noch eine Momentenkorrektur vornimmt (vgl. Bem. in 3.2.1). Da die hierfür möglichen Verfahren auf einer äquidistanten Intervallzerlegung (3-2a) der betrachteten Zufallsvariable aufbauen, wird ihre Anwendung bei

Schätzungen aus Häufigkeitsverteilungen, die dieses Kriterium nicht erfüllen, problematisch.

Dennoch haben wir uns bei unseren praktischen Berechnungen für die Momentenmethode entschieden wegen ihrer großen rechentechnischen Vorteile gegenüber den anderen Methoden. Allerdings werden wir nicht die in 3.1.1 beschriebene Methode anwenden, sondern eine von uns modifizierte Form benutzen, die auf den (drei) möglichen Kurvenformen des PEARSON-Systems aufbaut und nun beschrieben werden soll.

Wie bereits erwähnt, gehen wir von einer vorgegebenen, gruppierten Stichprobe - mit fester Klasseneinteilung des Definitionsbereichs - einer kontinuierlichen, eindimensionalen Zufallsvariablen- gem. (3-2) aus.

Mit Hilfe der in 3.1.1 beschriebenen Momentenmethode erhält man für eine solche Stichprobe Schätzungen für die ersten vier Momente entweder anhand von (3.1.1-2) oder anhand von (3.1.1-4). Im ersten Fall wählt man in jedem einzelnen Intervall $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ der vorgegebenen Intervallzerlegung (3-2a) jeweils einen Punkt ξ_i aus, ordnet diesem die gesamte Häufigkeitsmasse des jeweiligen Intervalls zu ("Ein-Punkt-Verteilung für jedes vorgegebene Intervall") und gewinnt die Momentenschätzungen dann mit Hilfe von (3.1.1-2a). Im zweiten Fall nimmt man auf den einzelnen vorgegebenen Intervallen jeweils eine Gleichverteilung an und erhält so als Dichtefunktion eine Treppenfunktion, mit deren Hilfe man dann anhand von (3.1.1-4a) die Schätzungen für die ersten vier Momente ermitteln kann.

Durch die Schätzwerte für die ersten vier Momente ist eindeutig eine Approximationsfunktion f(x) aus dem PEARSON-System definiert, für deren Parameter man mittels der in 2 angegebe-

nen Formeln Schätzwerte anhand der Momentenschätzwerte berechnen kann.

Die Approximationsgüte der so ermittelten Approximationsfunktion f(x) aus dem PEARSON-System hängt somit wesentlich von der Güte der Schätzungen für die einzelnen Momente ab. Da wir für die uns vorgegebene Häufigkeitsverteilung unterstellen, daß sie durch eine PEARSON-Funktion approximierbar ist, müssen wir vor allem dann, wenn die vorgegebene Häufigkeitsverteilung nur in wenige Klassen (bzw. Intervalle) aufgeteilt ist, damit rechnen, daß diese Schätzungen nicht allzu gut ausfallen, da wir auf den einzelnen Intervallen jeweils eine Gleichverteilung bzw. Einpunktverteilung angenommen haben, was bei oben genannter Hypothese als die wohl ungünstigste Annahme bezeichnet werden kann, die wir angesichts der möglichen Kurvenformen der PEARSON-Verteilungen treffen konnten.

Somit wird die anhand der Momentenschätzungen ermittelte PEARSON-Funktion - mit den geschätzten Parameterwerten - i.a. wohl nicht die beste Approximationsfunktion sein, die wir für unsere vorgegebene Häufigkeitsverteilung aus dem PEARSON-System finden können.

Dennoch dürfte der Kurvenverlauf der empirischen Verteilung auf einem festen Intervall $< x_{i-1}, x_i >$ der vorgegebenen Gruppierung, wäre sie nicht gruppiert, dem Kurvenverlauf der ermittelten PEARSON-Funktion (in einer ersten Näherung) eher entsprechen als dem Kurvenverlauf der Einpunktverteilung bzw. der Treppenfunktion, von der wir ausgegangen sind.

Das legt es nahe, von der vorgegebenen (zu groben) Intervallzerlegung (3-2a) der betrachteten Zufallsvariable zu einer Verfeinerung überzugehen und den einzelnen Intervallen einer solchen Verfeinerung, deren Gruppenbesetzungszahlen man dann nicht kennt, stattdessen geschätzte Häufigkeiten zuzuweisen, die sich durch eine Aufteilung der Häufigkeiten der ursprünglichen Gruppierung aufgrund des Kurvenverlaufs der ermittelten

PEARSON-Funktion ergeben. Mit Hilfe dieser "neuen" Häufigkeitsverteilung wird dann versucht, bessere Schätzungen für die ersten vier Momente zu gewinnen und somit zu einer besseren Approximationsfunktion aus dem PEARSON-System für die ursprünglich vorgegebene Häufigkeitsverteilung zu gelangen.

Formelmäßig läßt sich diese Vorgehensweise, die wir als "modifizierte, mehrstufige Momentenmethode" bezeichnen wollen, wie folgt beschrieben:

Die gem. (3-2a) vorliegenden Intervalle $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ zerlegen wir in paarweise disjunkte Teilintervalle $\langle x_{i,j-1}, x_{i,j} \rangle$, d.h. wir definieren Intervalle $\langle x_{i,j-1}, x_{i,j} \rangle$ so, daß

(3.3-1a) $$\langle x_{i-1}, x_i \rangle = \bigcup_{j=1}^{n} \langle x_{i,j-1}, x_{i,j} \rangle$$

mit

(3.3-1b) $$\langle x_{i,j-1}, x_{i,j} \rangle \cap \langle x_{i,k-1}, x_{i,k} \rangle = \begin{cases} \emptyset & \text{für } j \neq k \\ \langle x_{i,j-1}, x_{i,j} \rangle & \text{für } j = k \end{cases}$$

$$(j, k = 1, \ldots, n_i;\ i = 1, \ldots, s).$$

Ausgehend von den vorgegebenen Häufigkeiten h_i gem. (3.2b) ordnen wir den einzelnen Intervallen $\langle x_{i,j-1}, x_{i,j} \rangle$ unter Berücksichtigung der von uns geschätzten Approximationsfunktion $\hat{f}(x)$ Häufigkeiten $h_{i,j}$ zu, die wie folgt definiert seien

(3.3-1c) $$h_{i,j} = h_i \cdot \frac{\int_{x_{i,j-1}}^{x_{i,j}} \hat{f}(x)\, dx}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \hat{f}(x)\, dx}$$

$$(j = 1, \ldots, n_i;\ i = 1, \ldots s)$$

Hierbei gilt

(3.3-2a) $$\sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j} * h_i$$

und

(3.3-2b) $$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j} = n.$$

Nun kann man aus (3.3-1) mittels (3.1.1-2) oder (3.1.1-4) wieder eine neue Approximationsfunktion $\hat{f}_{(2)}(x)$ ermitteln und deren Anpassungsgüte an die vorgegebene Häufigkeitsverteilung (3-2) mit der der zuerst ermittelten Funktion $\hat{f}(x)$ bzw. $\hat{f}_{(1)}(x)$ vergleichen.

Eventuell können dann noch weitere Versuche gemacht werden, wobei in (3.3-1c) die $h_{i,j}$ anhand der h_i und $\hat{f}_{(2)}(x)$, $\hat{f}_{(3)}(x)$,... zu bestimmen sind.

Allgemein läßt sich unsere Vorgehensweise wie folgt zusammenfassen:

Gegeben sei eine Häufigkeitsverteilung in der Form (3-2), für die (in einem ersten Schritt) eine Approximationsfunktion $\hat{f}_{(1)}(x)$ aus dem PEARSON-System geschätzt worden sei. Von der gem. (3-2a) gegebenen Intervallzerlegung des Definitionsbereichs der betrachteten Zufallsvariable gehe man zu einer Verfeinerung in der Form (3.3-1a,b) über, wobei die Zahl der Intervalle dieser Verfeinerung genügend groß und die Länge jedes einzelnen dieser Intervalle genügend klein sei, um eine ausreichend gute numerische Integration der in Frage kommenden PEARSON-Funktionen zu gewährleisten. Wenn dann im k-ten Approximationsschritt (k = 2, 3,...) aus dem Schritt zuvor die Approximationsfunktion $\hat{f}_{(k-1)}(x)$ vorliegt, so teile man den einzelnen Intervallen $\langle x_{i,j-1}, x_{i,j} \rangle$ der oben definierten Verfeinerung von (3-2a) Häufigkeiten $h_{i,j}^{(k)}$ gem.

$$(3.3\text{-}1c') \qquad h_{i,j}^{(k)} = \frac{\int_{x_{i,j-1}}^{x_{i,j}} \hat{f}_{(k-1)}(x)\,dx}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \hat{f}_{(k-1)}(x)\,dx} \cdot h_i$$

$$(j = 1,\ldots n_i;\ i=1,\ldots,s;\ k=2,3,\ldots)$$

zu und ermittle anhand von (3.1.1-2) bzw. (3.1.1-4) die zugehörige Approximationsfunktion des k-ten Schritts $\hat{f}_{(k)}(x)$.

Im folgenden werden wir nun untersuchen, ob sich die oben dargestellte, auf einer Plausibilitätsbetrachtung beruhende, "modifizierte, mehrstufige Momentenmethode" dazu eignet, zu besseren Approximationsfunktionen aus dem PEARSON-System zu gelangen, als es mit der in 3.1.1 dargestellten (einfachen) Momentenmethode der Fall ist.

Dazu müssen wir zunächst voraussetzen, daß es sich bei der unbekannten Verteilung, auf die wir anhand der vorgegebenen Stichprobenverteilung (3-2) zurückschließen wollen, tatsächlich um eine PEARSON-Verteilung handelt.

In Kapitel 4 werden wir anhand von Simulationsrechnungen zeigen, daß unter obiger Voraussetzung mit Hilfe der modifinzierten Momentenmethode i.a. bessere Approximationen erreicht werden können als mit der (einfachen) Momentenmethode.

In Kapitel 5 werden wir auf Anwendungsbeispiele eingehen.

In beiden Kapiteln werden wir dabei auch noch zu präzisieren haben, was wir unter "ausreichender Approximationsgüte" zu verstehen haben.

4. Rechtfertigung der in 3.3 dargestellten modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode anhand von Simulationsrechnungen

Wir haben in Kapitel 3 dargestellt, daß man bei der Approximation von gruppierten Häufigkeitsverteilungen durch PEARSONsche Dichtefunktionen rechentechnisch am einfachsten mit Hilfe der Momentenmethode zu Parameterschätzungen für diese Funktionen gelangen kann, und die Vermutung geäußert, daß man bei Anwendung der modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode diese Schätzungen verbessern kann.

Dies durch einen mathematischen Beweis allgemeingültig nachzuweisen, dürfte sich angesichts der Komplexität des angesprochenen Sachverhalts als unmöglich erweisen.

Statt dessen werden wir im folgenden versuchen, anhand der Auswertung der Ergebnisse von Simulationsrechnungen die erwähnte Vorgehensweise zu rechtfertigen. Diese Simulationsrechnungen wurden mit einem für diesen Zweck erstellten EDV-Programm durchgeführt.

Ausgangspunkt unserer Simulationsrechnungen ist jeweils eine bestimmte PEARSON-Funktion mit festen Parameterwerten. Der zugehörige Definitionsbereich wird in eine bestimmte Zahl von äquidistanten Intervallen zerlegt. Die diesen Intervallen zugeordneten und mittels numerischer Integration berechneten Wahrscheinlichkeiten werden mit einem angenommenen "Stichprobenumfang" n ganzzahlig multipliziert.

Für die so gewonnene (gruppierte)Häufigkeitsverteilung wird mittels des χ^2-"Tests" beurteilt, ob sie als "Stichprobe"

der vorgegebenen PEARSON-Verteilung angesehen werden kann. Bei Annahme durch den "Test" wird dann aus der - somit genügend feinen - Intervallzerlegung durch Zusammenfassen von Intervallen eine gröbere Zerlegung konstruiert. Diese gröbere Zerlegung ist der Ausgangspunkt für unseren jeweiligen Versuch, mit Hilfe der modifizierten Momentenmethode zu einer möglichst guten Approximationsfunktion zu gelangen, die dann mit der ursprünglich vorgegebenen PEARSON-Funktion verglichen wird.

Auf weitere Einzelheiten werden wir bei der Beschreibung des für unsere Berechnungen erstellten EDV-Programms ("Simulationsprogramm") in 4.1 und bei der Kommentierung der erhaltenen Ergebnisse in 4.2 eingehen.

4.1 Beschreibung des für die Simulationsberechnungen entwickelten EDV-Programms ("Simulationsprogramm")

Das Simulationsprogramm ist in der Programmiersprache ALGOL geschrieben und wurde auf einer CONTROL DATA 3300 im Rechenzentrum der Universität Saarbrücken gerechnet.

Das Simulationsprogramm geht aus von einer standardisierten PEARSON-Funktion $f_0(x)$, die durch die Vorgabe von β_1 und β_2 gem. (2.1-6b) bzgl. Typ und Parameterwerten eindeutig bestimmt ist.

Der jeweilige Definitionsbereich einer solchen PEARSON-Funktion wird in m äquidistante, paarweise disjunkte Intervalle

(4.1-1a) $\langle z_{j-1}, z_j \rangle \qquad (j = 1,\ldots, m)$ ("Zerlegung $\tilde{z}$")

zerlegt, und es werden die zugehörigen Intervallwahrscheinlichkeiten

(4.1-1b) $p_{0,j} \qquad (j = 1,\ldots, m)$

mittels numerischer Integration anhand der SIMPSON-Regel (vgl. Anhang A4) ermittelt.[1)]

---

1) Liegt einer der Randpunkte des Definitionsbereichs der betrachteten PEARSON-Funktion im Unendlichen, so wird statt seiner aus rechentechnischen Gründen ein endlicher Randpunkt festgelegt. Dieser wird so bestimmt, daß die Forderung erfüllt wird, daß die Wahrscheinlichkeitsmasse auf dem Intervall von diesem endlichen Randpunkt bis zum eigentlichen (unendlichen) Randpunkt der betrachteten PEARSON-Funktion einen vorzugebenden Betrag - bei unseren Simulationsberechnungen wurde dafür ein Wert von 10^{-6} angesetzt - nicht überschreitet.

Durch ganzzahlige Multiplikation (mit Rundung) dieser Intervallwahrscheinlichkeiten mit einem angenommenen Stichprobenumfang

(4.1-2) n

werden die den einzelnen Intervallen zuzuordnenden absoluten Häufigkeiten

(4.1-3) $l_j = \text{entier}\,(n \cdot p_{0,j} + 0{,}5) \qquad (j = 1,\ldots, m)$

berechnet. (Die Funktion entier(x) ordnet jedem reellwertigen Argument x jeweils die größte ganze Zahl z zu, die kleiner oder gleich x ist.)

Der Einfluß des Stichprobenumfangs n bei der gewählten Zerlegung bzgl. des χ^2-Maßes wird anhand des Ausdrucks

(4.1-4) $$\chi_0^2\,(\tilde{f}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{(l_j - n \cdot p_{0,j})^2}{n \cdot p_{0,j}}$$

berechnet.

Mittels der Formeln

(4.1-5a) $$\hat{\mu}'_r = \sum_{j=1}^{m} \xi_j^r \; p_{0,j} \qquad (r = 1,\ldots,4)$$

mit

(4.1-5b) $$\xi_j = \frac{z_j + z_{j-1}}{2}$$

werden Schätzungen für die ersten vier Momente anhand der Zerlegung $\tilde{f}$ ermittelt, zu denen der jeweilige PEARSON-Typ und dessen Parameterwerte bestimmt werden.

Die Intervallwahrscheinlichkeiten auf der Zerlegung $\tilde{f}$ von dieser neuen Funktion $\hat{f}_1^*(x)$, die wir mit

(4.1-6) $p_{1,j}^* \qquad (j = 1,\ldots, m)$

bezeichnen wollen, werden mittels numerischer Integration anhand der SIMPSON-Regel bestimmt. Der Ausdruck

(4.1-7) $$X_1^2(\tilde{\mathcal{F}}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{(l_j - n \cdot p^*_{1,j})^2}{n \cdot p^*_{1,j}}$$

liefert ein Maß für die Anpassungsgüte der Approximationsfunktion $\hat{f}^*_1(x)$ an die durch (4.1-1,3) vorgegebene "Häufigkeitsverteilung".

Ist der Wert von $X_1^2(\tilde{\mathcal{F}})$ im Sinne des χ^2-Tests nicht zufriedenstellend, so wird in (4.1-1a) die Intervallzahl verdoppelt, und es werden die voranstehenden einzelnen Rechenschritte wiederholt.

Bzgl. $X_0^2(\tilde{\mathcal{F}})$ gem. (4.1-4) und $X_1^2(\tilde{\mathcal{F}})$ gem. (4.1-7) ist anzumerken, daß die durch (4.1-1,3) gegebene "Häufigkeitsverteilung" bis auf einen i.a. zu vernachlässigenden "Zufallseffekt", der bei der Berechnung der Intervallwahrscheinlichkeiten und der ganzzahligen Multiplikation mit Rundung entsteht, keinen sonstigen Zufallsschwankungen bei den Besetzungszahlen für die einzelnen Intervalle unterworfen ist.

Ist der Wert von $X_1^2(\tilde{\mathcal{F}})$ zufriedenstellend, d.h. ist unsere Zerlegung $\tilde{\mathcal{F}}$ gem. (4.1-1a) genügend fein gewählt, so wird aus der Zerlegung $\tilde{\mathcal{F}}$ eine gröbere Zerlegung $\tilde{\mathcal{G}}$ konstruiert, indem man - vom linken Randpunkt z_0 des Definitionsbereichs von $f_0(x)$ ausgehend - solange Intervalle von $\tilde{\mathcal{F}}$ zusammenfaßt, bis die Gesamtwahrscheinlichkeit des sich so ergebenden neuen Intervalls einen vorzugebenden Wert von

(4.1-8) p %

überschreitet, bevor man ein neues Intervall für die Zerlegung $\tilde{\mathcal{G}}$ beginnt.

Hat das zuletzt gefundene bzw. am rechten Rand des Definitionsbereichs von $f_0(x)$ gelegene Intervall von $\mathcal{G}$ eine Wahrscheinlichkeit von weniger als o,8 . p %, so wird es mit dem benachbarten Intervall zu einem Intervall zusammengefaßt.

Die Zerlegung $\mathcal{G}$ zeichnet sich somit dadurch aus, daß ihre Intervalle annähernd den gleichen Prozentanteil an der Wahrscheinlichkeitsmasse besitzen - mit einer eventuellen Ausnahme des zuletzt konstruierten Intervalls.
Die auf Grund obiger Konstruktion erhaltene "Häufigkeitsverteilung" mit Zerlegung $\mathcal{G}$ läßt sich beschreiben durch die Intervallzerlegung

(4.1-9a) $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$

mit Intervallwahrscheinlichkeiten

(4.1-9b) p_i

bzw. Intervallhäufigkeiten

(4.1-9c) $h_i \qquad (i = 1, \ldots, s).$

Für die Zerlegung $\mathcal{G}$ lassen sich analog zu (4.1-4) und (4.1-7) die Ausdrücke

(4.1-1o) $$X_0^2(\mathcal{G}) = \sum_{i=1}^{s} \frac{(h_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$$

bzw.

(4.1-11) $$X_1^2(\mathcal{G}) = \sum_{i=1}^{s} \frac{(h_i - n \cdot \tilde{\pi}_{1,i})^2}{n \cdot \tilde{\pi}_{1,i}}$$

betrachten, wobei sich die $\tilde{\pi}_{1,i}$ im Einklang mit obigem Konstruktionsprinzip aus den $p^{*}_{1,j}$ gem. (4.1-6) ergeben.

Ab nun werden in unserer Simulationsrechnung die Rollen der Zerlegungen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ vertauscht, und es wird davon ausgegangen, daß die Häufigkeitsverteilung (4.1-9) vorgegeben sei und für diese eine Approximationsfunktion aus dem PEARSON-System mit Hilfe der in 3.3 beschriebenen modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode zu ermitteln sei.

So wie in 3.3 beschrieben, werden in einem ersten Approximationsschritt Schätzungen für die ersten vier Momente mittels

(4.1-12a) $$\hat{\mu}'_r = \sum_{i=1}^{s} \xi_i^r \cdot p_i$$

gewonnen, wobei

(4.1-12b) $$\xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$$

gesetzt wird. Anhand dieser Schätzungen wird der passende PEARSON-Typ ausgewählt, und es werden dessen Parameter berechnet.[1] Die so erhaltene Approximationsfunktion bezeichnen wir mit $\hat{f}_{(1)}(x)$.

Für alle weiteren Approximationsschritte wird als Verfeinerung der Zerlegung $\mathcal{G}$ gem. (4.1-9a) die Zerlegung $\mathcal{F}$ gem. (4.1-1a) gewählt, d.h.

---

1) Im ersten Approximationsschritt ermitteln wir somit unsere Parameterschätzungen mit Hilfe der in 3.1.1 dargestellten (einfachen) Momentenmethode.

wir erhalten aus (4.1-9a) die Intervalle

(4.1-13a) $$\langle x_{i,j-1},\ x_{i,j}\rangle \qquad (j = 1,\ldots,\ n_i;\ i = 1,\ldots,\ s)\ ,$$

wobei gilt

(4.1-13b) $$x_{i+1,0} = x_{i,n_i} = z_{n_1} + \ldots + n_i \qquad (i = 1,\ldots,\ s-1)$$

und

(4.1-13c) $$x_{1,0} = z_0$$

und

(4.1-13d) $$x_{s,n_s} = z_{n_1+\ \ldots\ +\ n_s} = z_m\ .$$

Im k-ten Approximationsschritt werden den Intervallen $\langle x_{i,j-1},\ x_i\rangle$ Häufigkeiten

(4.1-14) $$h_{i,j}^{(k)} = h_i \frac{\int_{x_{i,j-1}}^{x_{i,j}} \hat{f}_{(k-1)}\,(x)dx}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \hat{f}_{(k-1)}\,(x)dx}$$

$$(i = 1,\ldots,s;\ j = 1,\ldots,n_i;\ k = 2,3\ \ldots)$$

gem. (3.3-1c') zugeordnet und es werden die ersten vier Momente mittels

(4.1-15a) $$\hat{\mu}'_{r(k)} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_i} \xi_{i,j}^{r} \cdot h_{i,j}^{(k)} \qquad (r = 1,\ldots,\ 4)$$

mit

(4.1-15b) $$\xi_{i,j} = \frac{x_{i,j-1} + x_{i,j}}{2}$$

geschätzt, mit deren Hilfe man die Approximationsfunktion des k-ten Schritts $\hat{f}_{(k)}(x)$ erhält.

Die sich aus $\hat{f}_{(k)}(x)$ ergebenden "theoretischen" Intervallwahrscheinlichkeiten erhält man mittels numerischer Integration anhand der SIMPSON-Regel.

Die Approximationsgüte von $\hat{f}_{(k)}(x)$ wird anhand von

(4.1-16) $$\chi^2_{(k)}(\vartheta) = \sum_{i=1}^{s} \frac{(h_i - n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i})^2}{n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}}$$

beurteilt; zur Kontrolle wird ferner auch

(4.1-17) $$\chi^2_{(k)}(\tilde{\vartheta}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{(l_j - n \cdot p_{(k),j})^2}{n \cdot p_{(k),j}}$$

berechnet.

In das Programm sind zwei Stopanweisungen eingebaut:

(i) Es wird eine maximale Rechenzeit vorgegeben, bei deren Überschreitung die Berechnung abgebrochen wird.

(ii) Die Berechnung wird nach dem k-ten Schritt als vom Ergebnis her zufriedenstellend abgebrochen, wenn

(4.1-18a) $$\chi^2_{(k)}(\vartheta) \leq \chi^2_{krit} \quad (\alpha = 0{,}05;\ s - 5) \qquad (\text{"}\chi^2\text{-Kriterium"})$$

im Sinne des χ^2-Tests bei s - 5 Freiheitsgraden (wegen der Schätzung der ersten vier Momente) und

bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$ und wenn außerdem

(4.1-18b) $$\left| \chi^2_{(k)}(\vartheta) - \chi^2_{(k-1)}(\vartheta) \right| < c_{krit}$$ ("Konvergenzkriterium"),

wobei wir bei den von uns durchgeführten Berechnungen

(4.1-18c) $$c_{krit} = 10^{-2}$$

gesetzt haben.

Zu (4.1-18a) ist anzumerken, daß in Ermangelung anderer geeigneter Testverfahren trotz der in 3.2.3 genannten Bedenken wegen der Verwendung der Momentenmethode der χ^2-Test (mit Parameterschätzung) zur Beurteilung der Approximationsgüte von $\hat{f}_{(k)}(x)$ an die vorgegebene Häufigkeitsverteilung herangezogen wird. Dies geschieht jedoch mehr in dem Sinne, daß $\chi^2_{(k)}(\vartheta)$ gem. (4.1-16) als ein Abstandsmaß zwischen der vorgegebenen "empirischen" und der in jedem Schritt ermittelten theoretischen Verteilung angesehen wird, dessen Wert man von Schritt zu Schritt zu vermindern hofft. In diesem Sinne ist dann (4.1-18b) als eine Art Stabilisierungskriterium für die betrachtete mehrstufige Berechnung zu verstehen, bei dessen Erfüllung man für die weiteren Schritte keine weiteren entscheidenden Verbesserungen mehr erwartet.

Zur numerischen Integration auf den einzelnen Intervallen mit Hilfe der ("aneinandergereihten" oder "summierten") SIMPSON-Regel (vgl. Anhang A2) sind folgende Anmerkungen zu machen:

(i) Die jeweiligen numerischen Integrationen werden auf

den (äquidistanten) Intervallen der Zerlegung $\mathcal{F}$ durchgeführt; die Integralwerte für Intervalle der Zerlegung $\mathcal{G}$ werden durch Addition der Integralwerte der jeweiligen Intervalle von $\mathcal{F}$ ermittelt. Die Intervalle von $\mathcal{F}$ werden zunächst bei der numerischen Integration in eine im Programm vorgegebene Zahl 2 . J von Teilintervallen zerlegt, auf die dann die (einfache) SIMPSON-Regel angewandt wird.

(ii) Bei den Intervallen an den beiden Rändern des Definitionsbereichs der ermittelten Approximationsfunktion unterscheiden wir, ob der Randpunkt im Unendlichen liegt oder endlich ist; im letzten Fall unterscheiden wir dann nochmals, ob der Funktionswert der Approximationsfunktion gleich Null oder unendlich ist. Der Fall "endlicher Randpunkt mit Funktionswert Null" wird analog zu (i) behandelt. Im Fall "endlicher Randpunkt mit unendlichem Funktionswert" wird das betrachtete Randintervall zunächst ebenfalls in 2 . J Teilintervalle zerlegt, und es werden die vom Randpunkt entfernt liegenden Intervalle wie in (i) behandelt; das "neue" Randintervall wird halbiert, und das vom Rand entfernt liegende Intervall wieder wie in (i) behandelt; dann wird wieder das "neue" Randintervall halbiert, usw. ..., bis der zu berechnende Funktionswert bzw. die Länge der sich ergebenden Schrittweiten die maximal bzw. minimal zulässigen Werte für REAL-Größen der benutzten Rechenanlage über- bzw. unterschreiten, bzw. bis der Integralbeitrag eines einzelnen Teilintervalls kleiner als 10^{-6} wird. Der Fall "unendlicher Randpunkt" wird so behandelt, daß man beginnend mit der Länge der Teilintervalle des Nachbarintervalls (bzgl. $\mathcal{F}$) so-

lange Intervalle dieser Länge aneinandersetzt, bis der Integralbeitrag eines solchen Teilintervalls kleiner als $1o^{-6}$ wird; ab dann wird die Intervallänge verdoppelt, usw. ..., bis der Funktionswert der Approximationsfunktion den minimal zulässigen Wert für REAL-Größen bei der benutzten Rechenanlage unterschreitet.

(iii) Falls der Definitionsbereich der ermittelten Approximationsfunktion über den Definitionsbereich der vorgegebenen Häufigkeitsverteilung hinausragt, so wird der Integralwert auf dem "überlappenden" Intervall ebenfalls wie in (i) bzw. (ii) berechnet.

(iv) Zum Schluß werden die Anteile aller Intervalle von f sowie der evtl. vorhandenen überlappenden Intervalle aufsummiert. Im Idealfall muß der dabei sich ergebende Betrag gleich 1 sein. Für die numerische Integration ist eine Toleranzschwelle von 5 Prozent nach unten und nach oben eingebaut. Ist der Integralwert über dem gesamten Definitionsbereich der betrachteten Approximationsfunktion kleiner als o,95 oder größer als 1,o5, so wird die gesamte numerische Integration wiederholt, wobei J und somit die Zahl der Teilintervalle verdoppelt wird. Ist der Integralwert weiterhin außerhalb des angegebenen Toleranzbereichs und unterscheidet er sich von dem Integralwert der vorhergehenden Berechnung um mehr als $1o^{-4}$, so wird J nochmals verdoppelt, usw.. Bleibt es bei einer Abweichung von weniger als $1o^{-4}$, so wird durch das Programm eine Warnung ausgedruckt. Die Berechnung (mit weiteren Approximationsschritten) wird in einem solchen Fall nicht abgebrochen, da es durchaus möglich ist, daß man in späteren Approximationsschritten wieder Funktionen erhält, die ausreichend gut numerisch integrierbar sind. Solche Abweichungen von mehr als 5 % treten praktisch nur bei J- oder U-förmigen Kurven auf, wenn der Funk-

tionswert besonders stark anwächst und dabei der auf der benutzten Rechenanlage zulässige Bereich für REAL-Größen zu schnell verlassen wird. Diese Abweichungen machen sich dann zudem nur auf den Randintervallen bemerkbar, so daß es weiterhin gerechtfertigt erscheint, die für jeden Approximationsschritt zu schätzenden Häufigkeiten für die Intervalle der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ anhand von (4.1-14) festzulegen.

Interessiert man sich andererseits speziell für die Funktion, die mittels der im betrachteten EDV-Programm vorgesehenen Methoden nicht ausreichend gut numerisch integriert werden konnte, so kann man natürlich versuchen, mittels anderer Integrationsmethoden - außerhalb des EDV-Programms - zu besseren Ergebnissen zu gelangen.

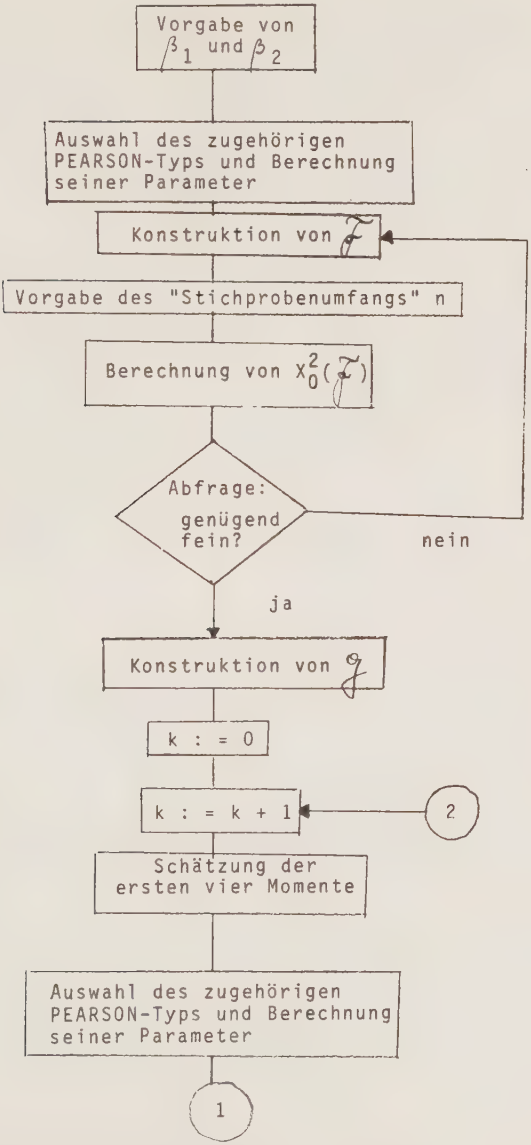
Bei praktischen Berechnungen ist anhand des Wertes von $\varkappa$ gem. (2.1-12) als in Frage kommender Funktionstyp fast immer nur einer der drei Haupttypen (PEARSON-Typen 1, 4 und 6) möglich. Werden dann die Parameterwerte eines solchen-Typs berechnet, so kann es passieren, daß - vor allem bei der Berechnung der jeweiligen Normierungskonstante y^* - der zulässige Zahlenbereich für REAL-Größen auf der benutzten Rechenanlage verlassen wird. Solche Fälle treten vor allem an den Rändern der Bereiche der drei Haupttypen (vgl. Zeichnung [2.4-Z1]) auf. Deshalb wurden außer den drei Haupttypen auch noch die Übergangstypen 3 und 5 in das Programm aufgenommen. Ferner enthält das Programm noch den Spezialtyp 12, der insofern wichtig ist, als das System der Bestimmungsgleichungen (2.1-5d) für die Parameter der PEARSON-DGL (2.1-5c) singulär werden kann.

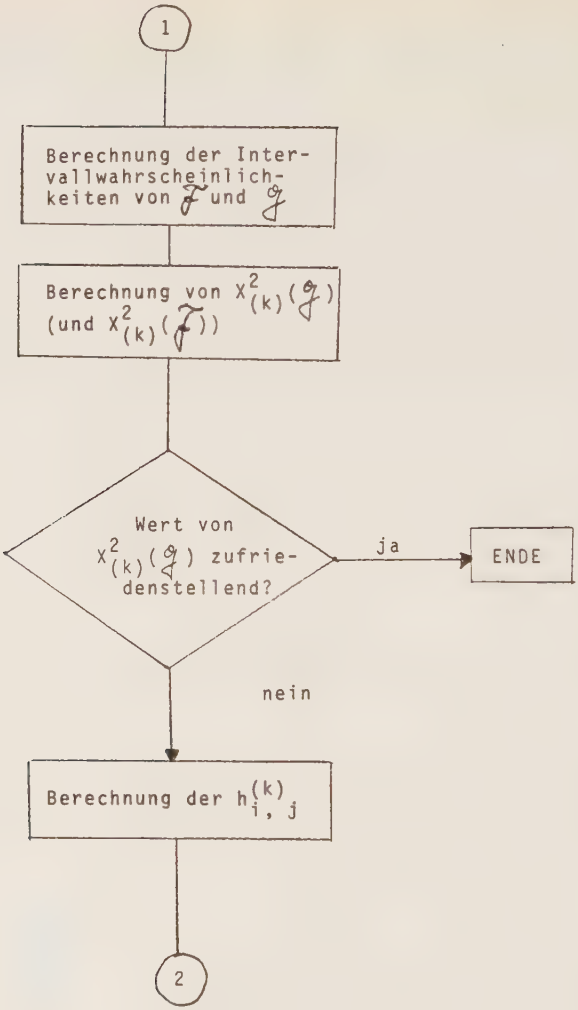
Auf den Einbau weiterer PEARSON-Typen mußte verzichtet werden, da der Speicherbedarf des entwickelten "Simulationsprogramms" sonst für die benutzte Rechenanlage zu groß geworden wäre.

Auf weitere Einzelheiten des Programms, die vorwiegend während des Austestens eingebaut wurden und einen möglichst großen Bereich der (β_1, β_2)-Ebene (vgl. Zeichnung [2.4-Z1]) für die Auswahl einer geeigneten Approximationsfunktion zum Ziel hatten, soll hier nicht weiter eingegangen werden, obwohl der Einbau gerade dieser Elemente bei der Erstellung des gesamten Programms viel Zeit erforderte.

Die wichtigsten Schritte des "Simulationsprogramms" sind in dem folgenden (verkürzten) Flußdiagramm zusammengestellt.

Zeichnung [4.1-Z1] : Flußdiagramm mit den wesentlichsten Elementen des "Simulationsprogramms"




1
Berechnung der Intervallwahrscheinlichkeiten von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$
Berechnung von $X^2_{(k)}(\mathcal{G})$ (und $X^2_{(k)}(\mathcal{F})$)
Wert von $X^2_{(k)}(\mathcal{G})$ zufriedenstellend?
ja
ENDE
nein
Berechnung der $h^{(k)}_{i,j}$
2

4.2 Ergebnisse der Simulationsberechnungen

Ziel unserer Simulationsberechnungen war es zu zeigen, daß man zu einer (stark) gruppierten Häufigkeitsverteilung mit Hilfe der in 3.3 dargestellten modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode i.a. zu einer besseren Approximationsfunktion - aus dem PEARSON-System - findet, als es mit Hilfe der in 3.1 dargestellten (einfachen) Momentenmethode der Fall ist.

Um sicher zu sein, daß die bei unseren Berechnungen jeweils vorgegebene Häufigkeitsverteilung als Stichprobe einer PEARSON-Verteilung angesehen werden konnte, gingen wir den bereits in 4.1 beschriebenen Weg, den wir nun in einigen Punkten noch präzisieren wollen:

Augangspunkt für jede einzelne Simulationsberechnung war jeweils eine mittels β_1 und β_2 gem. (2.1-6b) vorgegebene (standardisierte) PEARSON-Funktion. Deren Definitionsbereich wurde in

(4.2-1) $m = 256$ (vgl. 4.1-1))

äquidistante Intervalle unterteilt (Zerlegung $\mathcal{Z}$); bei einem unendlichen Definitionsbereich der betrachteten PEARSON-Funktion wurde dabei zuvor ein "endlicher Randpunkt" so festgesetzt, daß auf dem Intervall von diesem "endlichen Randpunkt" bis zu dem eigentlichen (unendlichen) Randpunkt der betrachteten Verteilung eine Wahrscheinlichkeitsmasse von noch höchstens 10^{-6} erwartet werden durfte.

In allen von uns untersuchten Fällen erwies sich die so konstruierte Zerlegung $\mathcal{Z}$ als ausreichend fein, d.h. es gelang uns, mit Hilfe der (einfachen) Momentenmethode anhand dieser Zerlegung und den den einzelnen Intervallen zugeordneten Wahrscheinlichkeiten wieder zu einer PEARSON-Funktion zurück-

zufinden, die von der ursprünglichen PEARSON-Funktion nicht allzu sehr verschieden war. Letzteres wurde mittels des χ^2-Tests anhand der Werte von X_0^2 ($\mathcal{F}$) gem. (4.1-4) und X_1^2 ($\mathcal{F}$) gem. (4.1-7) beurteilt, wobei wir auf die Aussagefähigkeit der jeweiligen Werte von X_0^2 ($\mathcal{F}$) und X_1^2 ($\mathcal{F}$) in bezug auf die Approximationsgüte einer ermittelten Approximationsfunktion an eine vorgegebene Häufigkeitsverteilung im späteren Verlauf dieser Untersuchung noch eingehen werden.

Aus der Zerlegung $\mathcal{F}$ wurde die Zerlegung $\mathcal{G}$ in der in 4.1 beschriebenen Weise konstruiert, indem

(4.2-2) $p = 12{,}5\ \%$ (vgl. (4.1-8))

gesetzt wurde. Somit ergaben sich für die Zerlegung $\mathcal{G}$ i.a. sechs oder sieben Intervalle mit jeweils einigermaßen gleichen Besetzungszahlen.

Die so entstandene Häufigkeitsverteilung (mit Zerlegung $\mathcal{G}$) war dann der eigentliche Ausgangspunkt für unsere Simulationsberechnungen.

Bei den einzelnen Momentenschätzungen wurden keine Momentenkorrekturen (vgl. Anhang A 3) vorgenommen.

Um den Einfluß des (angenommenen) Stichprobenumfangs n (vgl. (4.1-2)) beurteilen zu können, wurden zwei Serien von Berechnungen durchgeführt; in einer ersten, größeren Serie wurde

(4.2-3a) $n = 100$,

in einer zweiten Serie wurde

(4.2-3b) $n = 1000$

gesetzt.

Wegen der geringen Zahl von Intervallen von $\mathcal{G}$ wurde auf eine künstliche Erzeugung von Zufallsschwankungen bei den Besetzungszahlen für die einzelnen Intervalle von $\mathcal{G}$ verzichtet. Auf Fragen, die mit dem Vorliegen von solchen Zufallsschwankungen zusammenhängen, werden wir in Kapitel 5 bei der Kommentierung der Ergebnisse von Anwendungsbeispielen noch ausführlich eingehen.

Bei unseren Simulationsberechnungen wurden lediglich Häufigkeitsverteilungen betrachtet, bei denen die Zerlegung $\mathcal{G}$ anhand von (4.1-8) konstruiert wurde, da es uns angesichts der Vielzahl von Möglichkeiten, eine solche Zerlegung zu konstruieren, zunächst einmal nur darauf ankam, die mittels der (einfachen) Momentenmethode erzielten Ergebnisse mit den mittels der modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode gewonnenen Ergebnisse zu vergleichen und zu entscheiden, ob es überhaupt den Aufwand lohnen könnte, mit der modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode zu arbeiten. Auf den Einfluß verschiedenartiger Zerlegungen auf die Momentenschätzungen werden wir bei der Besprechung einiger Anwendungsbeispiele in 5.2 noch eingehen.

Es wurde von PEARSON-Funktionen aus einem möglichst großen Bereich in der (β_1, β_2)-Ebene ausgegangen (vgl. Zeichnungen [4.2-Z1] und [4.2-Z2]). So konnte es dann vorkommen, daß durch die vorgegebene Wertekombination von β_1 und β_2 gem. (2.1-6b) ein PEARSON-Typ definiert wurde, der nicht in dem von uns entwickelten EDV-Programm für diese Simulationsberechnungen berücksichtigt wurde, bzw. es konnte auch vorkommen, daß bei der Berechnung der Parameterwerte eines im EDV-Programm erfaßten PEARSON-Typs anhand der Werte von β_1 und β_2 rechentechnische Schwierigkeiten auftraten, da der zulässige Zahlenbereich, in dem auf der benutzten Rechenanlage gerechnet werden konnte, verlassen wurde. Komplikationen dieser Art ergaben sich bei Wertekombinationen für β_1 und β_2 an den Rändern der Bereiche der drei PEARSONschen Haupttypen (vgl. Zeichnungen [4.2-Z1] und [4.2-Z2]). Eine

weitere Komplikation ergab sich bei in der Nähe der $(\beta_2 - \beta_1 - 1)$-Linie einzuordnenden Verteilungen des Haupttyps I (U), die z.T. nicht ausreichend gut numerisch integriert werden konnten (vgl. 4.1). Trat diese Komplikation bereits bei der Ausgangsverteilung auf, so wurde in einem solchen Fall die Rechnung abgebrochen. In anderen Fällen wurde geprüft, ob in einem späteren Approximationsschritt die Aussicht bestand, zu Verteilungen zu kommen, die wieder ausreichend gut numerisch integrierbar sein würden - dann wurde die Rechnung fortgesetzt.

Die bei den genannten Komplikationen gewonnenen Erfahrungen wurden bei der Entwicklung des für die Anwendungsbeispiele benutzten EDV-Programms verwandt. Am Simulationsprogramm wurden aufgrund dieser rechentechnischen Komplikationen keine Veränderungen vorgenommen, da Wert darauf gelegt wurde, die gesamten Simulationsberechnungen mit einer einzigen Programmversion durchzuführen, um einen möglichst guten Vergleich der einzelnen Ergebnisse zu gewährleisten. In 475 Fällen (der beiden Serien) nahmen unsere Berechnungen einen ungestörten Verlauf. In 28 Fällen - davon in 19 bereits bei der vorgegebenen Startfunktion - ergaben sich (einzelne) Parameterwerte in einer auf der benutzten Rechenanlage nicht zulässigen Größenordnung. In weiteren 37 Fällen war die numerische Integration der vorgegebenen Ausgangsverteilung nicht ausreichend gut.

Für jeden Approximationsschritt einer jeden Simulationsberechnung wurde eine Fülle von Informationen ausgedruckt. Wir werden uns bei der Auswertung dieser Berechnungen auf folgende Fragestellung konzentrieren:

(i) Wie nahe kommt man - unter Berücksichtigung der Stopregel (4.1-18) - in den einzelnen Approximationsschritten wieder an die vorgegebene Funktion heran?

(ii) Was läßt sich über die Werte von $X^2_{(k)}$ ($\mathcal{G}$ gem. (4.1-16) im Vergleich zu den Werten von X^2_0 ($\mathcal{G}$ gem. (4.1.1o) und

X_1^2 ($\mathcal{G}$) gem. (4.1-11) und ferner im Zusammenhang mit (4.1-18a), d.h. im Zusammenhang mit dem χ^2-Test (mit Parameterschätzungen) sagen?

Die erste Frage werden wir mit Hilfe eines Vergleichs der Momentenwerte bestimmter Approximationsschritte mit den ursprünglich vorgegebenen Momentenwerten zu beantworten versuchen. In engem Zusammenhang damit sind dann die Ergebnisse auf den ersten Teil der zweiten Frage zu sehen. Die Ergebnisse zum zweiten Teil der zweiten Frage interessieren uns insofern, als wir, wie (4.1-18a) zeigt, den χ^2-Test als ein Beurteilungskriterium für die Anpassungsgüte einer ermittelten PEARSON-Funktion an die jeweils vorgegebene Häufigkeitsverteilung heranziehen. Das tun wir mangels anderer geeigneter Tests trotz der bestenfalls nur bedingten Anwendbarkeit - wegen der Schätzung der Verteilungsparameter anhand der Momentenmethode - dieses Tests (vgl. 3.2.3). Dabei darf jedoch andererseits auch darauf hingewiesen werden, daß wir zwar fordern, daß (4.1-18a) erfüllt ist, damit eine ermittelte PEARSON-Funktion überhaupt als Approximationsfunktion für die jeweils vorgegebene Häufigkeitsverteilung akzeptabel ist, daß aber für die eigentliche Beurteilung der Approximationsgüte in erster Linie der Wert von $X^2_{(k)}$ ($\mathcal{G}$) gem. (4.1-16), - den es zu minimieren gilt, - und weitere, noch zu nennende Kriterien ausschlaggebend sind. Auf diese zusätzlichen Beurteilungskriterien werden wir in 5.2 bei der Betrachtung von Anwendungsbeispielen nach und nach zu sprechen kommen.

Beim Vergleich der (ersten vier) Momentenwerte beschränken wir uns auf die folgenden Approximationsschritte:

(i) den 1. Schritt, der zur Beurteilung der einfachen Momentenmethode (vgl. 3.1.1) dient,

(ii) den n_1-Schritt, worunter wir den Approximationsschritt verstehen wollen, bei dem $X^2_{(n_1)}$ ($\mathcal{G}$) die Beziehung (4.1-18a) erstmals erfüllt ("Annahme durch χ^2-Test") - hierbei beachte man, daß $n_1 = 1$ sein kann -,

(iii) den n_2-ten Schritt, bei dem die Simulationsberechnung im Sinne von (4.1-18) als zufriedenstellend abgebrochen wird.

Für das erste und zweite Moment werden wir die absoluten Abweichungen

(4.2-4a) $$a_{r,(k)} = \hat{\mu}'_{r,(k)} - \mu^*_r \qquad (r = 1,2;\ k = 1,n_1,\ n_2)$$

und für das dritte und vierte Moment die relativen Abweichungen

(4.2-4b) $$a_{r,(k)} = \frac{\hat{\mu}'_{r,(k)} - \mu^*_r}{\mu^*_r} \qquad (r = 3,4;\ k = 1,n_1,n_2)$$

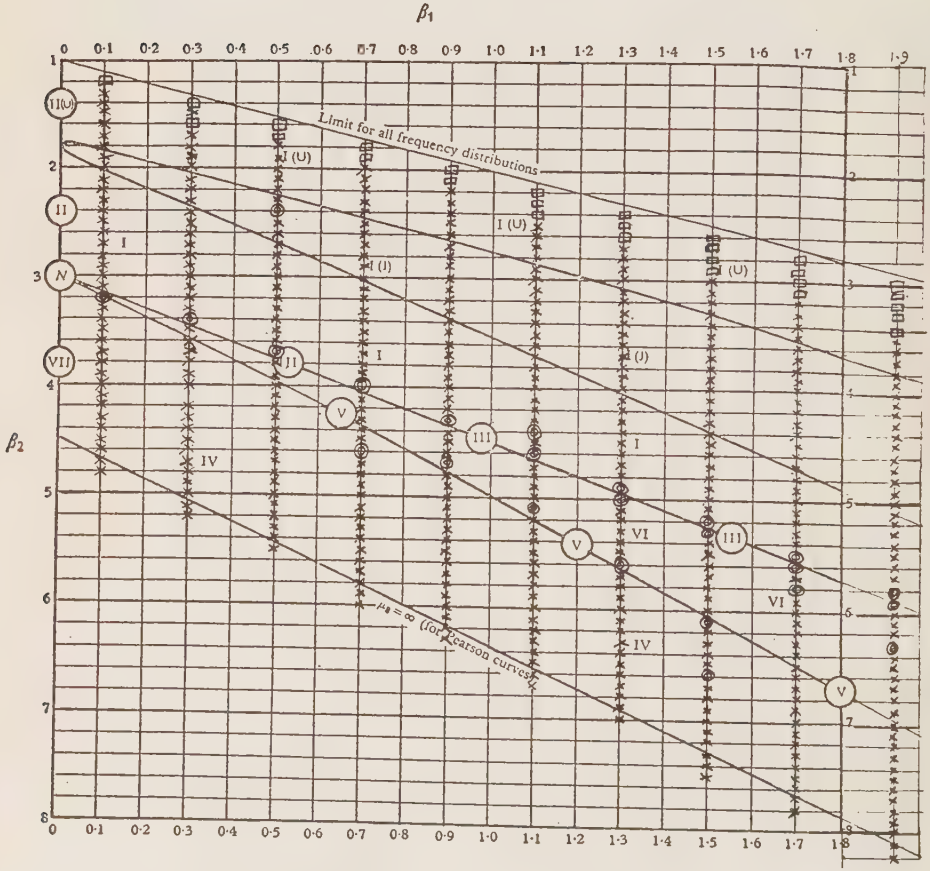
betrachten, wobei mit μ^*_r ($r = 1,2,3,4$) die vorgegebenen (ersten vier) standardisierten Momente bezeichnet sind; es gilt

(4.2-5) $$\mu^*_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad \mu^*_2 = 1 \ .$$

Da wir bei unseren Simulationsrechnungen jeweils von standardisierten Funktionen ausgehen, in aller Regel in den einzelnen Approximationsschritten jedoch für das 1. und 2. Moment Schätzwerte erhalten, die von 0 bzw. 1 verschieden sind, erscheint es uns sinnvoll, außer den absoluten bzw. relativen Abweichungen der geschätzten Momentenwerte $\hat{\mu}'_r$ von den vorgegebenen (standardisierten) Momentenwerten μ^*_r analoge Ausdrücke zu (4.2-4a,b) zu betrachten, wobei an Stelle der $\hat{\mu}'_r$ die jeweiligen zentralen Momentenschätzungen $\hat{\mu}_r$ bzw. die standardisierten Momentenschätzungen $\hat{\mu}^*_r$ in (4.2-4a,b) einzusetzen sind. Auf diese Art wird versucht, den Einfluß schlechter Schätzungen für das 1. Moment bzw. für die beiden ersten Momente auf die jeweiligen höheren Momente auszuschalten. Die jeweiligen

absoluten bzw. relativen Abweichungen der in den oben genannten Approximationsschritten ($k = 1, n_1, n_2$) erhaltenen Schätzwerte der Momente $\hat{\mu}'_{r,(k)}$ ($r = 1, 2, 3, 4$), der zentralen Momente $\hat{\mu}_{r,(k)}$ ($r = 2, 3, 4$) und der standardisierten Momente $\hat{\mu}^*_{r,(k)}$ ($r = 3, 4$) sind für unsere erste Serie von Simulationsrechnungen (mit Stichprobenumfang $n = 100$) in den Tabellen [4.2-T1 - 1a, b, c, d], [4.2-T1 - 2a, b, c] und [4.2-T1 - 3a, b] ausgewertet worden; die Ergebnisse unserer zweiten Serie von Simulationsrechnungen findet man in den Tabellen [4.2-T2 - 1a, b, c, d] , [4.2-T2 - 2a, b, c] und [4.2-T2 - 3a, b] , wobei in diesen Tabellen zum Vergleich in Klammern die den Ergebnissen der zweiten Serie entsprechenden Resultate aus der ersten Serie angegeben sind.

Zeichnung [4.2-Z1] [1]: Startwerte (β_1, β_2) für die 1. Serie unserer Simulationsrechnungen



Zeichenerklärung :

× durchgerechnetes Beispiel (397 Fälle)

▭ Berechnung abgebrochen wegen unzureichender numerischer Integration bei der Startfunktion (28 F.)

◎ Berechnung abgebrochen aus sonstigen Gründen (arithmetic overflow etc.) (24 F.)

---

1) vgl. Fußnote zu Zeichnung [2.4-Z1]

Tabelle [4.2-T1-1a]:

AUSWERTUNG DER SIMULATIONSRECHNUNGEN (1. SERIE; 397 durchgerechnete Fälle)

1. Moment

Abs. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt	Abs. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt
$-0{,}01 < X < 0$	13	13	85	$0 \leqslant X < 0{,}01$	19	35	98
$-0{,}02 < X \leqslant -0{,}01$	2	6	29	$0{,}01 \leqslant X < 0{,}02$	16	34	91
$-0{,}05 < X \leqslant -0{,}02$		11	19	$0{,}02 \leqslant X < 0{,}05$	28	65	69
$-0{,}1 < X \leqslant -0{,}05$				$0{,}05 \leqslant X < 0{,}1$	21	139	6
$-0{,}2 < X \leqslant -0{,}1$				$0{,}1 \leqslant X < 0{,}2$	18	93	
$-0{,}3 < X \leqslant -0{,}2$				$0{,}2 \leqslant X < 0{,}3$	23		
$-0{,}4 < X \leqslant -0{,}3$				$0{,}3 \leqslant X < 0{,}4$	34		
$-0{,}5 < X \leqslant -0{,}4$				$0{,}4 \leqslant X < 0{,}5$	30		
$-0{,}6 < X \leqslant -0{,}5$				$0{,}5 \leqslant X < 0{,}6$	57		
$-0{,}7 < X \leqslant -0{,}6$				$0{,}6 \leqslant X < 0{,}7$	58		
$-0{,}8 < X \leqslant -0{,}7$				$0{,}7 \leqslant X < 0{,}8$	35		
$-0{,}9 < X \leqslant -0{,}8$				$0{,}8 \leqslant X < 0{,}9$	18		
$-1 < X \leqslant -0{,}9$				$0{,}9 \leqslant X < 1$	4		
$-1{,}25 < X \leqslant -1$				$1 \leqslant X < 1{,}25$	10	1	
$-1{,}5 < X \leqslant -1{,}25$				$1{,}25 \leqslant X < 1{,}5$	4		
$-1{,}75 < X \leqslant -1{,}5$				$1{,}5 \leqslant X < 1{,}75$	1		
$-2 < X \leqslant -1{,}75$				$1{,}75 \leqslant X < 2$	1		
$-3 < X \leqslant -2$				$2 \leqslant X < 3$	3		
$-4 < X \leqslant -3$				$3 \leqslant X < 4$	1		
$-5 < X \leqslant -4$				$4 \leqslant X < 5$	1		
$X \leqslant -5$				$5 \leqslant X$			

Def.: $X := \hat{\mu}_{1,(k)}' - \mu_1^*$

Tabelle [4.2-T1-1b]:

AUSWERTUNG DER SIMULATIONSRECHNUNGEN (1. SERIE; 397 durchgerechnete Fälle)

2. Moment

Abs. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt	Abs. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt
-o,o1< X < 0	2	3	35	0 ≤ X <o,o1	2	2	17
-o,o2< X ≤-o,o1	3	5	22	o,o1≤ X <o,o2	1	4	27
-o,o5< X ≤ -o,o2	15	18	6o	o,o2≤ X <o,o5	7	12	82
-o,1 < X ≤ -o,o5	24	23	47	o,o5≤ X <o,1	9	14	43
-o,2 < X ≤ -o,1	1o	11	17	o,1 ≤ X <o,2	14	32	32
-o,3 < X ≤ -o,2				o,2 ≤ X <o,3	1o	32	12
-o,4 < X ≤ -o,3				o,3 ≤ X <o,4	3	27	2
-o,5 < X ≤ -o,4				o,4 ≤ X <o,5	8	47	
-o,6 < X ≤ -o,5				o,5 ≤ X <o,6	1	54	1
-o,7 < X ≤ -o,6				o,6 ≤ X <o,7	8	4o	
-o,8 < X ≤ -o,7				o,7 ≤ X <o,8	3	34	
-o,9 < X ≤ -o,8				o,8 ≤ X <o,9	4	19	
-1 < X ≤ -o,9				o,9 ≤ X <1	3	16	
-1,25< X ≤ -1				1 ≤ X <1,25	9	3	
-1,5 < X ≤ -1,25				1,25≤ X <1,5	4	1	
-1,75< X ≤ -1,5				1,5 ≤ X <1,75	3		
-2 < X ≤ -1,75				1,75≤ X <2	7		
-3 < X ≤ -2				2 ≤ X <3	13		
-4 < X ≤ -3				3 ≤ X <4	16		
-5 < X ≤ -4				4 ≤ X <5	36		
X ≤ -5				5 ≤ X	182		

Def.: $X := \hat{\mu}'_{2,(k)} - \mu^*_2$

Tabelle [4.2-T1-1c]:

AUSWERTUNG DER SIMULATIONSRECHNUNGEN (1. SERIE; 397 durchgerechnete Fälle)

3. Moment

Rel.Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt	Rel.Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt
$+o,o1 < X < 0$	1	1	5	$0 \leqslant X < o,o1$			5
$+o,o2 < X \leqslant -o,o1$		1	6	$o,o1 \leqslant X < o,o2$	1	1	8
$+o,o5 < X \leqslant -o,o2$	5	7	24	$o,o2 \leqslant X < o,o5$	1	3	18
$+o,1 < X \leqslant -o,o5$	8	9	28	$o,o5 \leqslant X < o,1$	5	7	31
$+o,2 < X \leqslant -o,1$	24	26	38	$o,1 \leqslant X < o,2$	6	8	5o
$+o,3 < X \leqslant -o,2$	13	11	29	$o,2 \leqslant X < o,3$	7	5	26
$+o,4 < X \leqslant -o,3$	5	7	13	$o,3 \leqslant X < o,4$	3	4	35
$+o,5 < X \leqslant -o,4$		4	4	$o,4 \leqslant X < o,5$	4	8	17
$+o,6 < X \leqslant -o,5$		1		$o,5 \leqslant X < o,6$	7	7	12
$+o,7 < X \leqslant -o,6$				$o,6 \leqslant X < o,7$	1	6	7
$+o,8 < X \leqslant -o,7$				$o,7 \leqslant X < o,8$	5	9	7
$+o,9 < X \leqslant -o,8$				$o,8 \leqslant X < o,9$	2	6	4
$+1 \; < X \leqslant -o,9$				$o,9 \leqslant X < 1$	2	11	5
$-1,25 < X \leqslant -1$				$1 \leqslant X < 1,25$	3	24	13
$-1,5 < X \leqslant -1,25$				$1,25 \leqslant X < 1,5$	4	22	4
$-1,75 < X \leqslant -1,5$				$1,5 \leqslant X < 1,75$	3	13	4
$-2 \; < X \leqslant -1,75$				$1,75 \leqslant X < 2$	3	2o	1
$-3 \; < X \leqslant -2$				$2 \leqslant X < 3$	12	73	2
$-4 \; < X \leqslant -3$				$3 \leqslant X < 4$	11	37	1
$-5 \; < X \leqslant -4$				$4 \leqslant X < 5$	5	23	
$X \leqslant -5$				$5 \leqslant X$	256	42	

Def.: $X := \dfrac{\hat{\mu}'_{3,(k)} - \mu^*_3}{\mu^*_3}$

Tabelle [4.2-T1-1d]:

AUSWERTUNG DER SIMULATIONSRECHNUNGEN (1. SERIE; 397 durchgerechnete Fälle)

4. Moment

Rel. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt	Rel. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt
$-0{,}01 < X < 0$		1	7	$0 \leqslant X < 0{,}01$	2	3	8
$-0{,}02 < X \leqslant -0{,}01$	2	3	8	$0{,}01 \leqslant X < 0{,}02$	3	2	9
$-0{,}05 < X \leqslant -0{,}02$	2	2	31	$0{,}02 \leqslant X < 0{,}05$		2	17
$-0{,}1 < X \leqslant -0{,}05$	9	8	26	$0{,}05 \leqslant X < 0{,}1$	5	5	25
$-0{,}2 < X \leqslant -0{,}1$	26	28	46	$0{,}1 \leqslant X < 0{,}2$	6	6	46
$-0{,}3 < X \leqslant -0{,}2$	17	18	42	$0{,}2 \leqslant X < 0{,}3$	6	5	24
$-0{,}4 < X \leqslant -0{,}3$	6	5	17	$0{,}3 \leqslant X < 0{,}4$	5	7	15
$-0{,}5 < X \leqslant -0{,}4$	2	6	5	$0{,}4 \leqslant X < 0{,}5$	5	9	18
$-0{,}6 < X \leqslant -0{,}5$			1	$0{,}5 \leqslant X < 0{,}6$	3	2	7
$-0{,}7 < X \leqslant -0{,}6$				$0{,}6 \leqslant X < 0{,}7$	4	8	4
$-0{,}8 < X \leqslant -0{,}7$				$0{,}7 \leqslant X < 0{,}8$	2	3	6
$-0{,}9 < X \leqslant -0{,}8$				$0{,}8 \leqslant X < 0{,}9$	1	7	2
$-1 < X \leqslant -0{,}9$				$0{,}9 \leqslant X < 1$	3	8	3
$-1{,}25 < X \leqslant -1$				$1 \leqslant X < 1{,}25$	3	12	6
$-1{,}5 < X \leqslant -1{,}25$				$1{,}25 \leqslant X < 1{,}5$	4	20	6
$-1{,}75 < X \leqslant -1{,}5$				$1{,}5 \leqslant X < 1{,}75$	5	26	5
$-2 < X \leqslant -1{,}75$				$1{,}75 \leqslant X < 2$	2	12	5
$-3 < X \leqslant -2$				$2 \leqslant X < 3$	10	62	5
$-4 < X \leqslant -3$				$3 \leqslant X < 4$	7	60	2
$-5 < X \leqslant -4$				$4 \leqslant X < 5$	3	28	1
$X \leqslant -5$				$5 \leqslant X$	254	39	

Def.: $X := \dfrac{\hat{\mu}'_{4,(k)} - \mu^*_4}{\mu^*_4}$

Tabelle [4.2-T1-2a]:

AUSWERTUNG DER SIMULATIONSRECHNUNGEN (1. SERIE; 397 durchgerechnete Fälle)

2. Zentrales Moment

Abs. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt	Abs. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt
$-o,o1 < X < 0$	4	5	48	$0 \leqslant X < o,o1$	1	4	27
$-o,o2 < X \leqslant -o,o1$	3	5	26	$o,o1 \leqslant X < o,o2$	1	1	32
$-o,o5 < X \leqslant -o,o2$	15	17	57	$o,o2 \leqslant X < o,o5$	6	11	5o
$-o,1 < X \leqslant -o,o5$	24	24	5o	$o,o5 \leqslant X < o,1$	9	14	43
$-o,2 < X \leqslant -o,1$	1o	11	17	$o,1 \leqslant X < o,2$	17	41	33
$-o,3 < X \leqslant -o,2$				$o,2 \leqslant X < o,3$	8	23	11
$-o,4 < X \leqslant -o,3$				$o,3 \leqslant X < o,4$	4	31	2
$-o,5 < X \leqslant -o,4$				$o,4 \leqslant X < o,5$	6	52	
$-o,6 < X \leqslant -o,5$				$o,5 \leqslant X < o,6$	4	46	
$-o,7 < X \leqslant -o,6$				$o,6 \leqslant X < o,7$	6	42	
$-o,8 < X \leqslant -o,7$				$o,7 \leqslant X < o,8$	4	31	
$-o,9 < X \leqslant -o,8$				$o,8 \leqslant X < o,9$	5	22	
$-1 < X \leqslant -o,9$				$o,9 \leqslant X < 1$	2	13	
$-1,25 < X \leqslant -1$				$1 \leqslant X < 1,25$	9	2	
$-1,5 < X \leqslant -1,25$				$1,25 \leqslant X < 1,5$	3	1	
$-1,75 < X \leqslant -1,5$				$1,5 \leqslant X < 1,75$	8		
$-2 < X \leqslant -1,75$				$1,75 \leqslant X < 2$	4		
$-3 < X \leqslant -2$				$2 \leqslant X < 3$	11		
$-4 < X \leqslant -3$				$3 \leqslant X < 4$	23		
$-5 < X \leqslant -4$				$4 \leqslant X < 5$	47		
$X \leqslant -5$				$5 \leqslant X$	163		

Def.: $X := \hat{\mu}_{2,(k)} - \mu_2^*$

Tabelle [4.2-T1-2b]:

AUSWERTUNG DER SIMULATIONSRECHNUNGEN (1. SERIE; 397 durchgerechnete Fälle)

3. Zentrales Moment

Rel. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt	Rel. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt
$o,o1 < X < 0$			4	$0 \leqslant X < o,o1$	1	1	4
$o,o2 < X \leqslant -o,o1$	1		5	$o,o1 \leqslant X < o,o2$	1	1	11
$o,o5 < X \leqslant -o,o2$	3	1	24	$o,o2 \leqslant X < o,o5$	4	7	27
$o,1 < X \leqslant -o,o5$	1o	15	42	$o,o5 \leqslant X < o,1$	3	4	3o
$o,2 < X \leqslant -o,1$	26	29	45	$o,1 \leqslant X < o,2$	9	9	49
$o,3 < X \leqslant -o,2$	21	2o	26	$o,2 \leqslant X < o,3$	6	8	35
$o,4 < X \leqslant -o,3$	3	5	4	$o,3 \leqslant X < o,4$	5	5	28
$o,5 < X \leqslant -o,4$		1	2	$o,4 \leqslant X < o,5$	5	6	13
$o,6 < X \leqslant -o,5$				$o,5 \leqslant X < o,6$	4	11	7
$o,7 < X \leqslant -o,6$		1		$o,6 \leqslant X < o,7$	3	7	5
$o,8 < X \leqslant -o,7$				$o,7 \leqslant X < o,8$	2	1o	8
$o,9 < X \leqslant -o,8$				$o,8 \leqslant X < o,9$	3	11	6
$1 : < X \leqslant -o,9$				$o,9 \leqslant X < 1$	1	1o	4
$1,25 < X \leqslant -1$				$1 \leqslant X < 1,25$	6	28	8
$1,5 < X \leqslant -1,25$				$1,25 \leqslant X < 1,5$	5	15	5
$1,75 < X \leqslant -1,5$				$1,5 \leqslant X < 1,75$	4	18	3
$2 : < X \leqslant -1,75$				$1,75 \leqslant X < 2$	5	23	
$3 < X \leqslant -2$				$2 \leqslant X < 3$	9	8o	2
$4 < X \leqslant -3$				$3 \leqslant X < 4$	8	23	
$5 < X \leqslant -4$				$4 \leqslant X < 5$	4	16	
$X \leqslant -5$				$5 \leqslant X$	244	32	

Def.: $X := \dfrac{\hat{\mu}_{3,(k)} - \mu_3^*}{\mu_3^*}$

Tabelle [4.2-T1-2c]:

AUSWERTUNG DER SIMULATIONSRECHNUNGEN (1. SERIE; 397 durchgerechnete Fälle)

4. Zentrales Moment

Rel. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt	Rel. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt
$+0{,}01 < X < 0$	1	2	5	$0 \leqslant X < 0{,}01$	1	2	9
$+0{,}02 < X \leqslant -0{,}01$	1		9	$0{,}01 \leqslant X < 0{,}02$			7
$+0{,}05 < X \leqslant -0{,}02$	4	5	35	$0{,}02 \leqslant X < 0{,}05$	3	3	17
$+0{,}1 < X \leqslant -0{,}05$	1o	11	28	$0{,}05 \leqslant X < 0{,}1$	4	5	25
$+0{,}2 < X \leqslant -0{,}1$	26	26	49	$0{,}1 \leqslant X < 0{,}2$	8	6	47
$+0{,}3 < X \leqslant -0{,}2$	21	22	44	$0{,}2 \leqslant X < 0{,}3$	5	8	26
$+0{,}4 < X \leqslant -0{,}3$	7	6	12	$0{,}3 \leqslant X < 0{,}4$	6	8	12
$+0{,}5 < X \leqslant -0{,}4$	1	3	5	$0{,}4 \leqslant X < 0{,}5$	3	5	17
$+0{,}6 < X \leqslant -0{,}5$				$0{,}5 \leqslant X < 0{,}6$	5	7	7
$+0{,}7 < X \leqslant -0{,}6$				$0{,}6 \leqslant X < 0{,}7$	1	6	5
$+0{,}8 < X \leqslant -0{,}7$		1		$0{,}7 \leqslant X < 0{,}8$	3	5	5
$+0{,}9 < X \leqslant -0{,}8$				$0{,}8 \leqslant X < 0{,}9$	2	7	3
$+1 \; < X \leqslant -0{,}9$				$0{,}9 \leqslant X < 1$	4	5	2
$+1{,}25 < X \leqslant -1$				$1 \leqslant X < 1{,}25$	5	13	6
$+1{,}5 < X \leqslant -1{,}25$				$1{,}25 \leqslant X < 1{,}5$	5	25	8
$+1{,}75 < X \leqslant -1{,}5$				$1{,}5 \leqslant X < 1{,}75$	3	23	1
$+2 \; < X \leqslant -1{,}75$				$1{,}75 \leqslant X < 2$	3	13	5
$+3 \; < X \leqslant -2$				$2 \leqslant X < 3$	1o	69	5
$+4 \; < X \leqslant -3$				$3 \leqslant X < 4$	4	56	3
$+5 \; < X \leqslant -4$				$4 \leqslant X < 5$	4	21	
$X \leqslant -5$				$5 \leqslant X$	245	34	

Def.: $X := \dfrac{\hat{\mu}_{4,(k)} - \mu_4^*}{\mu_4^*}$

Tabelle [4.2-T1-3a]:

AUSWERTUNG DER SIMULATIONSRECHNUNGEN (1. SERIE; 397 durchgerechnete Fälle)

3. Standardisiertes Moment

Rel. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt	Rel. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt
-o,o1< X < 0	12	6	8	0 ≤ X <o,o1	5	2	13
-o,o2< X ≤-o,o1	2	4	15	o,o1≤ X <o,o2	4	6	11
-o,o5< X ≤ -o,o2	17	12	44	o,o2≤ X <o,o5	2o	11	34
-o,1 < X ≤ -o,o5	35	35	5o	o,o5≤ X <o,1	46	11	46
-o,2 < X ≤ -o,1	63	33	21	o,1 ≤ X <o,2	63	27	63
-o,3 < X ≤ -o,2	6	1	2	o,2 ≤ X <o,3	43	22	34
-o,4 < X ≤ -o,3			1	o,3 ≤ X <o,4	28	2o	16
-o,5 < X ≤ -o,4		2		o,4 ≤ X <o,5	16	29	14
-o,6 < X ≤ -o,5		1		o,5 ≤ X <o,6	1o	32	9
-o,7 < X ≤ -o,6				o,6 ≤ X <o,7	6	21	11
-o,8 < X ≤ -o,7		1		o,7 ≤ X <o,8	6	2o	2
-o,9 < X ≤ -o,8		1		o,8 ≤ X <o,9	4	15	1
-1 < X ≤ -o,9				o,9 ≤ X <1		1o	1
-1,25< X ≤ -1				1 ≤ X <1,25	4	21	
-1,5 < X ≤ -1,25				1,25≤ X <1,5	1	6	
-1,75< X ≤ -1,5	1			1,5 ≤ X <1,75	3	1o	1
-2 < X ≤ -1,75				1,75≤ X <2		11	
-3 < X ≤ -2				2 ≤ X <3	1	2o	
-4 < X ≤ -3				3 ≤ X <4	1	5	
-5 < X ≤ -4				4 ≤ X <5		1	
X ≤ -5				5 ≤ X		1	

Def.: $X := \dfrac{\hat{\mu}^{*}_{3,(k)} - \mu^{*}_{3}}{\mu^{*}_{3}}$

Tabelle [4.2-T1-3b]:

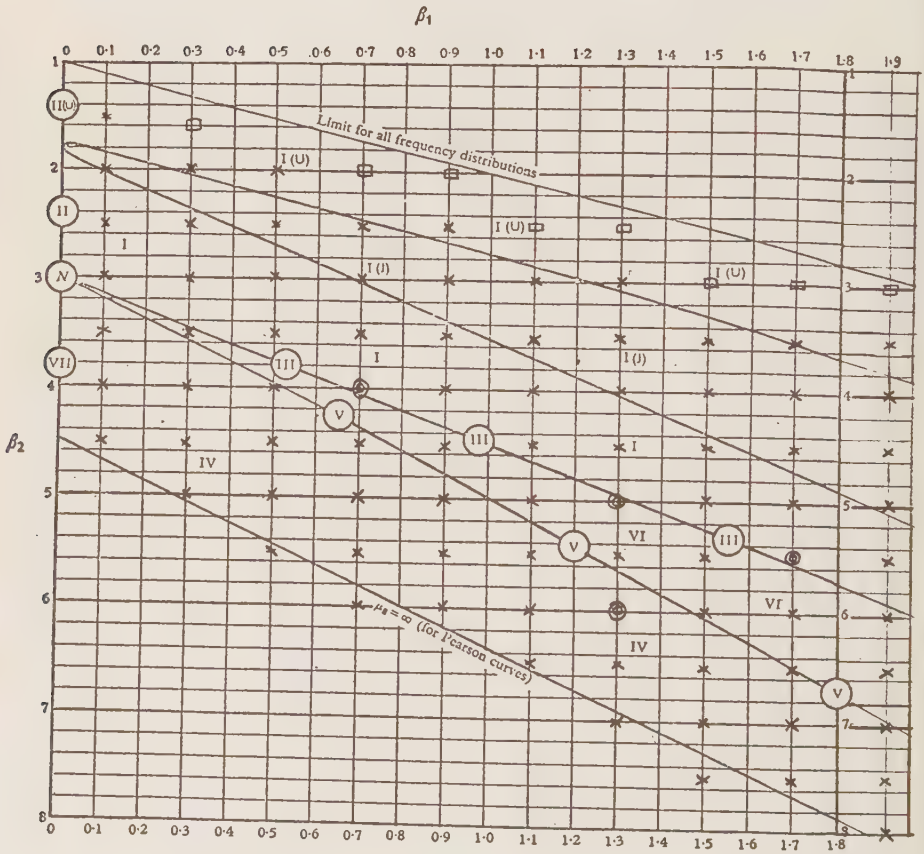
AUSWERTUNG DER SIMULATIONSRECHNUNGEN (1. SERIE; 397 durchgerechnete Fälle)

4. Standardisiertes Moment

Rel. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt	Rel. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt
$-0{,}01 < X < 0$	3	3	15	$0 \leq X < 0{,}01$	5	6	12
$-0{,}02 < X \leq -0{,}01$	7	9	16	$0{,}01 \leq X < 0{,}02$		1	12
$-0{,}05 < X \leq -0{,}02$	17	14	34	$0{,}02 \leq X < 0{,}05$	8	10	34
$-0{,}1 < X \leq -0{,}05$	20	22	50	$0{,}05 \leq X < 0{,}1$	4	6	42
$-0{,}2 < X \leq -0{,}1$	33	45	58	$0{,}1 \leq X < 0{,}2$	5	23	50
$-0{,}3 < X \leq -0{,}2$	56	8	9	$0{,}2 \leq X < 0{,}3$	4	30	21
$-0{,}4 < X \leq -0{,}3$	89	1		$0{,}3 \leq X < 0{,}4$		25	12
$-0{,}5 < X \leq -0{,}4$	96			$0{,}4 \leq X < 0{,}5$		42	4
$-0{,}6 < X \leq -0{,}5$	46			$0{,}5 \leq X < 0{,}6$	2	40	6
$-0{,}7 < X \leq -0{,}6$				$0{,}6 \leq X < 0{,}7$		44	6
$-0{,}8 < X \leq -0{,}7$				$0{,}7 \leq X < 0{,}8$		17	2
$-0{,}9 < X \leq -0{,}8$				$0{,}8 \leq X < 0{,}9$		10	3
$-1 < X \leq -0{,}9$		1		$0{,}9 \leq X < 1$		6	3
$-1{,}25 < X \leq -1$	1			$1 \leq X < 1{,}25$		6	4
$-1{,}5 < X \leq -1{,}25$	1			$1{,}25 \leq X < 1{,}5$		7	4
$-1{,}75 < X \leq -1{,}5$				$1{,}5 \leq X < 1{,}75$		5	
$-2 < X \leq -1{,}75$				$1{,}75 \leq X < 2$			
$-3 < X \leq -2$				$2 \leq X < 3$		9	
$-4 < X \leq -3$				$3 \leq X < 4$		5	
$-5 < X \leq -4$				$4 \leq X < 5$		1	
$X \leq -5$				$5 \leq X$		1	

Def.: $X := \dfrac{\hat{\mu}^*_{4,(k)} - \mu^*_4}{\mu^*_4}$

Zeichnung [4.2-Z2] [1]: Startwerte (β_1, β_2) für die 2. Serie unserer Simulationsrechnungen



Zeichenerklärung :

×	durchgerechnetes Beispiel (78 Fälle)
▭	Berechnung abgebrochen wegen unzureichender numerischer Integration bei der Startfunktion (9 F.)
◎	Berechnung abgebrochen aus sonstigen Gründen (arithmetic overflow etc.) (4 F.)

---

1) vgl. Fußnote zu Zeichnung [2.4-Z1]

Tabelle [4.2-T2-1a]:

AUSWERTUNG DER SIMULATIONSRECHNUNGEN (2. SERIE; 78 durchgerechnete Fälle)

(in Klammern: Zugehörige Ergebnisse der 1. Serie)

1. Moment

Abs.Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt	Abs.Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt
-o,o1< X < 0	2 (3)	7 (4)	26 (25)	0 ≤ X <o,o1	2 (2)	6 (5)	33 (16)
-o,o2< X ≤-o,o1	1 (1)	1 (1)	4 (6)	o,o1≤ X <o,o2	2 (1)	11 (3)	12 (15)
-o,o5< X ≤ -o,o2		1 (1)	0 (2)	o,o2≤ X <o,o5	6 (6)	46 (14)	3 (13)
-o,1 < X ≤ -o,o5				o,o5≤ X <o,1	3 (3)	6 (34)	0 (1)
-o,2 < X ≤ -o,1				o,1 ≤ X <o,2	3 (3)	0 (16)	
-o,3 < X ≤ -o,2				o,2 ≤ X <o,3	5 (4)		
-o,4 < X ≤ -o,3				o,3 ≤ X <o,4	6 (8)		
-o,5 < X ≤ -o,4				o,4 ≤ X <o,5	6 (6)		
-o,6 < X ≤ -o,5				o,5 ≤ X <o,6	14 (13)		
-o,7 < X ≤ -o,6				o,6 ≤ X <o,7	1o (1o)		
-o,8 < X ≤ -o,7				o,7 ≤ X <o,8	9 (1o)		
-o,9 < X ≤ -o,8				o,8 ≤ X <o,9	6 (5)		
-1 < X ≤ -o,9				o,9 ≤ X <1	1 (1)		
-1,25< X ≤ -1				1 ≤ X< 1,25			
-1,5 < X ≤ -1,25				1,25≤ X <1,5	2 (2)		
-1,75< X ≤ -1,5				1,5 ≤ X <1,75			
-2 < X ≤ -1,75				1,75≤ X <2			
-3 < X ≤ -2				2 ≤ X <3			
-4 < X ≤ -3				3 ≤ X <4			
-5 < X ≤ -4				4 ≤ X <5			
X ≤ -5				5 ≤ X			

Def.: $X := \mu'_{1,(k)} - \mu^*_1$

Tabelle [4.2-T2-1b]:

AUSWERTUNG DER SIMULATIONSRECHNUNGEN (2. SERIE; 78 durchgerechnete Fälle)
(in Klammern: Zugehörige Ergebnisse der 1. Serie)

2. Moment

Abs. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt	Abs. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt
$-0{,}01 < X < 0$	1 (2)	2 (2)	10 (6)	$0 \leqslant X < 0{,}01$		1 (0)	4 (4)
$-0{,}02 < X \leqslant -0{,}01$			4 (2)	$0{,}01 \leqslant X < 0{,}02$	1 (0)	5 (1)	4 (4)
$-0{,}05 < X \leqslant -0{,}02$	3 (2)	5 (3)	16 (16)	$0{,}02 \leqslant X < 0{,}05$	2 (1)	11 (1)	11 (17)
$-0{,}1 < X \leqslant -0{,}05$	3 (3)	6 (3)	14 (10)	$0{,}05 \leqslant X < 0{,}1$	1 (3)	16 (4)	9 (7)
$-0{,}2 < X \leqslant -0{,}1$	0 (1)	0 (1)	0 (2)	$0{,}1 \leqslant X < 0{,}2$	3 (2)	19 (5)	6 (9)
$-0{,}3 < X \leqslant -0{,}2$				$0{,}2 \leqslant X < 0{,}3$	2 (2)	13 (9)	0 (1)
$-0{,}4 < X \leqslant -0{,}3$				$0{,}3 \leqslant X < 0{,}4$	1 (1)	0 (4)	
$-0{,}5 < X \leqslant -0{,}4$				$0{,}4 \leqslant X < 0{,}5$	1 (1)	0 (11)	
$-0{,}6 < X \leqslant -0{,}5$				$0{,}5 \leqslant X < 0{,}6$		0 (9)	
$-0{,}7 < X \leqslant -0{,}6$				$0{,}6 \leqslant X < 0{,}7$	1 (1)	0 (11)	
$-0{,}8 < X \leqslant -0{,}7$				$0{,}7 \leqslant X < 0{,}8$	1 (1)	0 (8)	
$-0{,}9 < X \leqslant -0{,}8$				$0{,}8 \leqslant X < 0{,}9$	1 (1)	0 (4)	
$-1 < X \leqslant -0{,}9$				$0{,}9 \leqslant X < 1$	1 (1)	0 (2)	
$-1{,}25 < X \leqslant -1$				$1 \leqslant X < 1{,}25$	1 (1)		
$-1{,}5 < X \leqslant -1{,}25$				$1{,}25 \leqslant X < 1{,}5$	1 (2)		
$-1{,}75 < X \leqslant -1{,}5$				$1{,}5 \leqslant X < 1{,}75$	1 (0)		
$-2 < X \leqslant -1{,}75$				$1{,}75 \leqslant X < 2$	1 (1)		
$-3 < X \leqslant -2$				$2 \leqslant X < 3$	4 (4)		
$-4 < X \leqslant -3$				$3 \leqslant X < 4$	2 (2)		
$-5 < X \leqslant -4$				$4 \leqslant X < 5$	4 (4)		
$X \leqslant -5$				$5 \leqslant X$	42 (42)		

Def.: $X := \hat{\mu}'_{2,(k)} - \mu^*_2$

Tabelle [4.2-T2-1c]:

AUSWERTUNG DER SIMULATIONSRECHNUNGEN (2. SERIE; 78 durchgerechnete Fälle)
(in Klammern: Zugehörige Ergebnisse der 1. Serie)

3. Moment

Rel. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt	Rel. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt
$-0{,}01 < X < 0$	0 (1)	0 (1)	3 (0)	$0 \leqslant X < 0{,}01$			2 (0)
$-0{,}02 < X \leqslant -0{,}01$				$0{,}01 \leqslant X < 0{,}02$			3 (3)
$-0{,}05 < X \leqslant -0{,}02$	1 (0)	1 (1)	6 (5)	$0{,}02 \leqslant X < 0{,}05$	1 (0)	1 (0)	2 (3)
$-0{,}1 < X \leqslant -0{,}05$	2 (1)	2 (2)	7 (7)	$0{,}05 \leqslant X < 0{,}1$	0 (1)	2 (2)	8 (7)
$-0{,}2 < X \leqslant -0{,}1$	2 (3)	5 (4)	16 (11)	$0{,}1 \leqslant X < 0{,}2$	4 (2)	4 (1)	4 (10)
$-0{,}3 < X \leqslant -0{,}2$	1 (2)	2 (2)	8 (6)	$0{,}2 \leqslant X < 0{,}3$	1 (2)	9 (2)	7 (3)
$-0{,}4 < X \leqslant -0{,}3$	1 (1)	1 (1)	0 (1)	$0{,}3 \leqslant X < 0{,}4$	1 (0)	5 (1)	3 (7)
$-0{,}5 < X \leqslant -0{,}4$				$0{,}4 \leqslant X < 0{,}5$		7 (0)	4 (3)
$-0{,}6 < X \leqslant -0{,}5$				$0{,}5 \leqslant X < 0{,}6$	0 (1)	6 (0)	1 (2)
$-0{,}7 < X \leqslant -0{,}6$				$0{,}6 \leqslant X < 0{,}7$	1 (0)	3 (2)	0 (1)
$-0{,}8 < X \leqslant -0{,}7$				$0{,}7 \leqslant X < 0{,}8$	2 (3)	4 (4)	2 (2)
$-0{,}9 < X \leqslant -0{,}8$				$0{,}8 \leqslant X < 0{,}9$	1	6 (1)	0 (1)
$-1 < X \leqslant -0{,}9$				$0{,}9 \leqslant X < 1$		1 (2)	2 (1)
$-1{,}25 < X \leqslant -1$				$1 \leqslant X < 1{,}25$		6 (3)	0 (4)
$-1{,}5 < X \leqslant -1{,}25$				$1{,}25 \leqslant X < 1{,}5$		4 (3)	
$-1{,}75 < X \leqslant -1{,}5$				$1{,}5 \leqslant X < 1{,}75$	1 (2)	2 (4)	0 (1)
$-2 < X \leqslant -1{,}75$				$1{,}75 \leqslant X < 2$	4 (2)	2 (4)	
$-3 < X \leqslant -2$				$2 \leqslant X < 3$		4 (14)	
$-4 < X \leqslant -3$				$3 \leqslant X < 4$	2 (3)	1 (11)	
$-5 < X \leqslant -4$				$4 \leqslant X < 5$	2 (1)	0 (7)	
$X \leqslant -5$				$5 \leqslant X$	51 (53)	0 (6)	

Def.: $X := \dfrac{\hat{\mu}'_{3,(k)} - \mu^*_3}{\mu^*_3}$

Tabelle [4.2-T2-1d]:

AUSWERTUNG DER SIMULATIONSRECHNUNGEN (2. SERIE; 78 durchgerechnete Fälle)

(in Klammern: Zugehörige Ergebnisse der 1. Serie)

4. Moment

Rel. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt	Rel. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt
$+o,o1 < X < 0$			0 (2)	$0 \leqslant X < o,o1$	1 (0)	1 (1)	1 (2)
$+o,o2 < X \leqslant -o,o1$	0 (1)	0 (1)	5 (1)	$o,o1 \leqslant X < o,o2$	1 (1)		1 (1)
$+o,o5 < X \leqslant -o,o2$		2 (0)	7 (5)	$o,o2 \leqslant X < o,o5$		2 (1)	4 (2)
$+o,1 < X \leqslant -o,o5$	2 (1)	2 (0)	2 (4)	$o,o5 \leqslant X < o,1$		5 (0)	2 (7)
$+o,2 < X \leqslant -o,1$	5 (6)	3 (6)	12 (13)	$o,1 \leqslant X < o,2$	1 (2)	6 (2)	7 (5)
$+o,3 < X \leqslant -o,2$	2 (3)	6 (4)	13 (10)	$o,2 \leqslant X < o,3$	1 (0)	6 (0)	4 (8)
$+o,4 < X \leqslant -o,3$			0 (2)	$o,3 \leqslant X < o,4$	1 (1)	5 (0)	4 (1)
$+o,5 < X \leqslant -o,4$				$o,4 \leqslant X < o,5$	2 (2)	5 (1)	2 (5)
$+o,6 < X \leqslant -o,5$		1 (0)		$o,5 \leqslant X < o,6$		10 (1)	1 (1)
$+o,7 < X \leqslant -o,6$				$o,6 \leqslant X < o,7$	1 (1)	3 (5)	2 (0)
$+o,8 < X \leqslant -o,7$				$o,7 \leqslant X < o,8$		3 (0)	3 (0)
$+o,9 < X \leqslant -o,8$				$o,8 \leqslant X < o,9$	0 (1)	1 (1)	1 (2)
$+1 < X \leqslant -o,9$				$o,9 \leqslant X < 1$	1 (0)	4 (0)	0 (1)
$+1,25 < X \leqslant -1$				$1 \leqslant X < 1,25$	1 (1)	5 (3)	1 (3)
$+1,5 < X \leqslant -1,25$				$1,25 \leqslant X < 1,5$	1 (1)	2 (5)	
$+1,75 < X \leqslant -1,5$				$1,5 \leqslant X < 1,75$	1 (1)	1 (7)	0 (1)
$+2 < X \leqslant -1,75$				$1,75 \leqslant X < 2$		2 (0)	0 (2)
$-3 < X \leqslant -2$				$2 \leqslant X < 3$	1 (1)	3 (12)	
$-4 < X \leqslant -3$				$3 \leqslant X < 4$	2 (3)	0 (13)	
$-5 < X \leqslant -4$				$4 \leqslant X < 5$	1 (0)	0 (7)	
$X \leqslant -5$				$5 \leqslant X$	53 (52)	0 (8)	

Def.: $X := \dfrac{\hat{\mu}'_{4,(k)} - \mu^*_4}{\mu^*_4}$

Tabelle [4.2-T2-2a]:

AUSWERTUNG DER SIMULATIONSRECHNUNGEN (2. SERIE; 78 durchgerechnete Fälle)

(in Klammern: Zugehörige Ergebnisse der 1. Serie)

2. Zentrales Moment

Abs. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt	Abs.Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt
-o,o1< X < 0	1 (2)	3 (2)	12 (9)	0 ⩽ X <o,o1	1 (0)	5 (1)	4 (4)
-o,o2< X ⩽-o,o1			6 (3)	o,o1⩽ X <o,o2		2 (0)	5 (5)
-o,o5< X ⩽ -o,o2	3 (2)	5 (3)	16 (14)	o,o2⩽ X <o,o5	2 (1)	9 (1)	6 (12)
-o,1 < X ⩽ -o,o5	3 (3)	6 (3)	14 (12)	o,o5⩽ X <o,1	1 (3)	16 (4)	9 (7)
-o,2 < X⩽ -o,1	0 (1)	0 (1)	0 (2)	o,1 ⩽ X <o,2	3 (3)	2o (6)	6 (1o)
-o,3 < X⩽ -o,2				o,2 ⩽ X <o,3	2 (2)	12 (8)	
-o,4 < X⩽ -o,3				o,3 ⩽ X <o,4	2 (1)	0 (5)	
-o,5 < X⩽ -o,4				o,4 ⩽ X <o,5		0 (12)	
-o,6 < X⩽ -o,5				o,5 ⩽ X <o,6	1 (1)	0 (7)	
-o,7 < X⩽ -o,6				o,6 ⩽ X <o,7		0 (12)	
-o,8 < X⩽ -o,7				o,7 ⩽ X <o,8	2 (2)	0 (7)	
-o,9 < X⩽ -o,8				o,8 ⩽ X <o,9	1 (1)	0 (4)	
-1 < X⩽ -o,9				o,9 ⩽ X <1		0 (2)	
-1,25< X⩽ -1				1 ⩽ X <1,25	2 (2)		
-1,5 < X⩽ -1,25				1,25⩽ X <1,5	1 (1)		
-1,75< X⩽ -1,5				1,5 ⩽ X <1,75	0 (1)		
-2 < X⩽ -1,75				1,75⩽ X <2	1 (0)		
-3 < X⩽ -2				2 ⩽ X <3	4 (4)		
-4 < X⩽ -3				3 ⩽ X <4	3 (4)		
-5 < X⩽ -4				4 ⩽ X <5	9 (8)		
X⩽ -5				5 ⩽ X	36 (36)		

Def.: $X := \hat{\mu}_{2,(k)} - \mu_2^*$

Tabelle [4.2-T2-2b]:

AUSWERTUNG DER SIMULATIONSRECHNUNGEN (2. SERIE; 78 durchgerechnete Fälle)
(in Klammern: Zugehörige Ergebnisse der 1. Serie)

3. Zentrales Moment

Rel.Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt	Rel.Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt
$-o,o1 < X < 0$		1 (0)	4 (1)	$0 \leqslant X < o,o1$	0 (1)		3 (2)
$-o,o2 < X \leqslant -o,o1$			1 (0)	$o,o1 \leqslant X < o,o2$	1 (0)		1 (1)
$-o,o5 < X \leqslant -o,o2$			6 (3)	$o,o2 \leqslant X < o,o5$	1 (1)	2 (2)	4 (5)
$-o,1 < X \leqslant -o,o5$	2 (2)	3 (1)	7 (11)	$o,o5 \leqslant X < o,1$		1 (1)	7 (11)
$-o,2 < X \leqslant -o,1$	5 (4)	6 (6)	2o (9)	$o,1 \leqslant X < o,2$	2 (2)	9 (3)	7 (6)
$-o,3 < X \leqslant -o,2$	2 (3)	2 (3)	3 (6)	$o,2 \leqslant X < o,3$	1 (2)	7 (0)	3 (3)
$-o,4 < X \leqslant -o,3$				$o,3 \leqslant X < o,4$	1 (0)	8 (0)	6 (8)
$-o,5 < X \leqslant -o,4$				$o,4 \leqslant X < o,5$	1 (1)	6 (4)	1 (2)
$-o,6 < X \leqslant -o,5$				$o,5 \leqslant X < o,6$	1 (1)	4 (3)	1 (1)
$-o,7 < X \leqslant -o,6$				$o,6 \leqslant X < o,7$		5 (0)	2 (1)
$-o,8 < X \leqslant -o,7$				$o,7 \leqslant X < o,8$	1 (1)	4 (2)	1 (2)
$-o,9 < X \leqslant -o,8$				$o,8 \leqslant X < o,9$	1 (1)	2 (1)	1 (2)
$-1 < X \leqslant -o,9$				$o,9 \leqslant X < 1$		3 (2)	0 (1)
$-1,25 < X \leqslant -1$				$1 \leqslant X < 1,25$	1 (1)	6 (5)	0 (2)
$-1,5 < X \leqslant -1,25$				$1,25 \leqslant X < 1,5$	1 (1)	3 (3)	0 (1)
$-1,75 < X \leqslant -1,5$				$1,5 \leqslant X < 1,75$		1 (5)	
$-2 < X \leqslant -1,75$				$1,75 \leqslant X < 2$	1 (2)	1 (4)	
$-3 < X \leqslant -2$				$2 \leqslant X < 3$	3 (2)	3 (19)	
$-4 < X \leqslant -3$				$3 \leqslant X < 4$		1 (7)	
$-5 < X \leqslant -4$				$4 \leqslant X < 5$		0 (2)	
$X \leqslant -5$				$5 \leqslant X$	51 (53)	0 (5)	

Def.: $X := \dfrac{\hat{\mu}_{3,(k)} - \mu_3^*}{\mu_3^*}$

Tabelle [4.2-T2-2c]:

AUSWERTUNG DER SIMULATIONSRECHNUNGEN (2. SERIE; 78 durchgerechnete Fälle)
(in Klammern: Zugehörige Ergebnisse der 1. Serie)

4. Zentrales Moment

Rel.Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt	Rel.Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt
$-o,o1 < X < 0$	1 (0)	1 (1)	0 (3)	$0 \leqslant X < o,o1$			1 (1)
$-o,o2 < X \leqslant -o,o1$			3 (0)	$o,o1 \leqslant X < o,o2$			1 (1)
$-o,o5 < X \leqslant -o,o2$	0 (1)	1 (2)	9 (5)	$o,o2 \leqslant X < o,o5$		3 (0)	4 (2)
$-o,1 < X \leqslant -o,o5$	2 (2)	3 (1)	2 (5)	$o,o5 \leqslant X < o,1$	1 (1)	4 (1)	5 (7)
$-o,2 < X \leqslant -o,1$	4 (4)	2 (4)	13 (14)	$o,1 \leqslant X < o,2$	3 (3)	6 (1)	5 (6)
$-o,3 < X \leqslant -o,2$	4 (4)	7 (5)	12 (1o)	$o,2 \leqslant X < o,3$		8 (0)	3 (8)
$-o,4 < X \leqslant -o,3$			6 (1)	$o,3 \leqslant X < o,4$	1 (1)	6 (1)	4 (0)
$-o,5 < X \leqslant -o,4$				$o,4 \leqslant X < o,5$		7 (3)	2 (5)
$-o,6 < X \leqslant -o,5$				$o,5 \leqslant X < o,6$	1 (1)	8 (3)	1 (1)
$-o,7 < X \leqslant -o,6$		1 (0)		$o,6 \leqslant X < o,7$		2 (0)	3 (0)
$-o,8 < X \leqslant -o,7$				$o,7 \leqslant X < o,8$	1 (2)	2 (0)	3 (2)
$-o,9 < X \leqslant -o,8$				$o,8 \leqslant X < o,9$	2 (1)	3 (2)	0 (1)
$-1 : < X \leqslant -o,9$				$o,9 \leqslant X < 1$	1 (1)	3 (0)	1 (1)
$-1,25 < X \leqslant -1$				$1 \leqslant X < 1,25$		4 (3)	0 (2)
$-1,5 < X \leqslant -1,25$				$1,25 \leqslant X < 1,5$		1 (9)	
$-1,75 < X \leqslant -1,5$				$1,5 \leqslant X < 1,75$	1 (1)	2 (2)	0 (1)
$-2 : < X \leqslant -1,75$				$1,75 \leqslant X < 2$	1 (1)	1 (3)	0 (2)
$-3 < X \leqslant -2$	0 (1)			$2 \leqslant X < 3$	2 (2)	3 (12)	
$-4 < X \leqslant -3$				$3 \leqslant X < 4$		0 (17)	
$-5 < X \leqslant -4$				$4 \leqslant X < 5$		0 (1)	
$X \leqslant -5$				$5 \leqslant X$	53 (52)	0 (7)	

Def.: $X := \dfrac{\hat{\mu}_{4,(k)} - \mu_4^*}{\mu_4^*}$

Tabelle [4.2-T2-3a]:

AUSWERTUNG DER SIMULATIONSRECHNUNGEN (2. SERIE; 78 durchgerechnete Fälle)
(in Klammern: Zugehörige Ergebnisse der 1. Serie)

3. Standardisiertes Moment

Rel.Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt	Rel.Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt
$-0{,}01 < X < 0$	1 (2)		3 (1)	$0 \leqslant X < 0{,}01$			3 (2)
$-0{,}02 < X \leqslant -0{,}01$	0 (1)		7 (3)	$0{,}01 \leqslant X < 0{,}02$	2 (2)	0 (2)	2 (1)
$-0{,}05 < X \leqslant -0{,}02$	2 (3)	1 (1)	7 (14)	$0{,}02 \leqslant X < 0{,}05$	5 (5)	3 (5)	6 (9)
$-0{,}1 < X \leqslant -0{,}05$	8 (7)	7 (5)	13 (7)	$0{,}05 \leqslant X < 0{,}1$	7 (7)	7 (0)	10 (8)
$-0{,}2 < X \leqslant -0{,}1$	11 (10)	5 (7)	10 (4)	$0{,}1 \leqslant X < 0{,}2$	13 (13)	9 (4)	9 (11)
$-0{,}3 < X \leqslant -0{,}2$	1 (1)			$0{,}2 \leqslant X < 0{,}3$	14 (11)	14 (6)	4 (8)
$-0{,}4 < X \leqslant -0{,}3$				$0{,}3 \leqslant X < 0{,}4$	1 (5)	7 (4)	2 (2)
$-0{,}5 < X \leqslant -0{,}4$		0 (1)		$0{,}4 \leqslant X < 0{,}5$	2 (2)	10 (7)	1 (13)
$-0{,}6 < X \leqslant -0{,}5$				$0{,}5 \leqslant X < 0{,}6$	3 (4)	2 (7)	1 (3)
$-0{,}7 < X \leqslant -0{,}6$				$0{,}6 \leqslant X < 0{,}7$	2 (1)	2 (2)	0 (1)
$-0{,}8 < X \leqslant -0{,}7$				$0{,}7 \leqslant X < 0{,}8$	2 (2)	1 (4)	
$-0{,}9 < X \leqslant -0{,}8$				$0{,}8 \leqslant X < 0{,}9$		4 (3)	0 (1)
$-1 < X \leqslant -0{,}9$				$0{,}9 \leqslant X < 1$		2 (3)	
$-1{,}25 < X \leqslant -1$				$1 \leqslant X < 1{,}25$		0 (6)	
$-1{,}5 < X \leqslant -1{,}25$				$1{,}25 \leqslant X < 1{,}5$	1 (1)	0 (2)	
$-1{,}75 < X \leqslant -1{,}5$				$1{,}5 \leqslant X < 1{,}75$		1 (3)	
$-2 < X \leqslant -1{,}75$				$1{,}75 \leqslant X < 2$		2 (1)	
$-3 < X \leqslant -2$				$2 \leqslant X < 3$	1 (1)	1 (4)	
$-4 < X \leqslant -3$				$3 \leqslant X < 4$		0 (1)	
$-5 < X \leqslant -4$				$4 \leqslant X < 5$			
$X \leqslant -5$				$5 \leqslant X$			

Def.: $X := \dfrac{\hat{\mu}^*_{3,(k)} - \mu^*_3}{\mu^*_3}$

Tabelle [4.2-T2-3b]:

AUSWERTUNG DER SIMULATIONSRECHNUNGEN (2. SERIE; 78 durchgerechnete Fälle)

(in Klammern: Zugehörige Ergebnisse der 1. Serie)

4. Standardisiertes Moment

Rel. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt	Rel. Abweichung	1. Schritt	n_1-ter Schritt	n_2-ter Schritt
$+0{,}01 < X < 0$	0 (1)	0 (1)	3 (3)	$0 \leqslant X < 0{,}01$		1 (0)	3 (0)
$+0{,}02 < X \leqslant -0{,}01$	3 (2)	0 (3)	4 (3)	$0{,}01 \leqslant X < 0{,}02$		1 (0)	1 (2)
$+0{,}05 < X \leqslant -0{,}02$	4 (3)	4 (2)	8 (9)	$0{,}02 \leqslant X < 0{,}05$	1 (1)	7 (1)	5 (9)
$+0{,}1 < X \leqslant -0{,}05$	2 (3)	2 (4)	8 (7)	$0{,}05 \leqslant X < 0{,}1$	1 (2)	9 (3)	7 (7)
$+0{,}2 < X \leqslant -0{,}1$	6 (5)	8 (6)	16 (13)	$0{,}1 \leqslant X < 0{,}2$	2 (0)	12 (4)	6 (8)
$+0{,}3 < X \leqslant -0{,}2$	8 (8)	0 (3)	6 (2)	$0{,}2 \leqslant X < 0{,}3$	1 (1)	12 (5)	5 (6)
$+0{,}4 < X \leqslant -0{,}3$	20 (21)			$0{,}3 \leqslant X < 0{,}4$		9 (4)	4 (2)
$+0{,}5 < X \leqslant -0{,}4$	20 (21)			$0{,}4 \leqslant X < 0{,}5$		6 (9)	2 (2)
$+0{,}6 < X \leqslant -0{,}5$	9 (8)			$0{,}5 \leqslant X < 0{,}6$	1 (0)	1 (10)	0 (2)
$+0{,}7 < X \leqslant -0{,}6$				$0{,}6 \leqslant X < 0{,}7$		0 (9)	
$+0{,}8 < X \leqslant -0{,}7$		1 (0)		$0{,}7 \leqslant X < 0{,}8$		1 (3)	
$+0{,}9 < X \leqslant -0{,}8$				$0{,}8 \leqslant X < 0{,}9$		2 (3)	0 (1)
$+1 < X \leqslant -0{,}9$				$0{,}9 \leqslant X < 1$		0 (1)	0 (1)
$+1{,}25 < X \leqslant -1$				$1 \leqslant X < 1{,}25$		1 (0)	0 (1)
$+1{,}5 < X \leqslant -1{,}25$	0 (1)			$1{,}25 \leqslant X < 1{,}5$		1 (4)	
$+1{,}75 < X \leqslant -1{,}5$				$1{,}5 \leqslant X < 1{,}75$			
$+2 < X \leqslant -1{,}75$				$1{,}75 \leqslant X < 2$			
$+3 < X \leqslant -2$				$2 \leqslant X < 3$		0 (2)	
$+4 < X \leqslant -3$				$3 \leqslant X < 4$		0 (1)	
$+5 < X \leqslant -4$				$4 \leqslant X < 5$			
$X \leqslant -5$				$5 \leqslant X$			

Def.: $X := \dfrac{\hat{\mu}^*_{4,(k)} - \mu^*_4}{\mu^*_4}$

Wenden wir uns zunächst den Ergebnissen unserer ersten Serie von Simulationsberechnungen (jeweils angenommener Stichprobenumfang n = 100; vgl. (4.2-3a)) und dabei speziell der Auswertung der Abweichungen der Schätzungen $\hat{\mu}'_{r,(k)}$ $(r = 1,\ldots, 4;\ k = 1, n_1, n_2)$ der ersten vier Momente von den ursprünglich vorgegebenen (standardisierten)Momentenwerten μ^*_r $(r = 1,\ldots, 4)$ - vgl. Tabellen [4.2-T1-1a, b, c, d] - zu, so ist festzustellen, daß bei den Schätzungen für alle vier Momente im n_2-ten Schritt erhebliche Verbesserungen gegenüber dem n_1-ten Schritt und noch weitaus bedeutendere Verbesserungen gegenüber dem 1. Schritt - und somit gegenüber den mit Hilfe der (einfachen) Momentenmethode ermittelten Schätzungen - erzielt werden konnten.

Besonders gut fallen die Schätzungen für das 1. Moment im n_2-ten Schritt aus (vgl. Tabelle [4.2-T1-1a]). Hier ist lediglich in 6 von 397 durchgerechneten Fällen eine (absolute) Abweichung von dem ursprünglich vorgegebenen Wert $(\mu^*_1 = 0)$ von mehr als 0,05 festzustellen, wobei jedoch alle diese Abweichungen kleiner als 0,1 sind. In fast der Hälfte der Fälle (183 bzw. 46 %) beträgt die jeweilige Abweichung weniger als 0,01. Im n_2-ten Schritt ist allgemein nur eine ganz leichte Tendenz zur Oberschätzung festzustellen, während für den n_1-ten Schritt in 298 Fällen (75 %) eine Abweichung von mehr als 0,02 und im 1. Schritt sogar in 347 Fällen (87 %) eine Abweichung der gleichen Größenordnung vorliegt - Vergleichszahl für den n_2-ten Schritt: 75 Fälle (19 %). Im n_1-ten Schritt liegen die meisten Abweichungen zwischen 0,02 und 0,2; im 1. Schritt sind die Abweichungen recht breit gestreut und am häufigsten zwischen 0,5 und 0,7 vorzufinden.

Für das 2. Moment (vgl. Tabelle [4.2-T1-1b]) kommt im n_2-ten Schritt am häufigsten eine Ober- bzw. Unterschätzung zwischen |0,02| und |0,05| vor. In nur 3 Fällen beträgt die Abweichung von dem Ausgangswert $(\mu^*_2 = 1)$ mehr als 0,3. Im n_1-ten Schritt

trifft das in 241 Fällen (61 %) und im 1. Schritt in 300 Fällen (76 %) zu; dabei ist im 1. Schritt in 182 Fällen (46 %) sogar eine Oberschätzung von mehr als 500 % festzustellen.

Für das 3. Moment (vgl. Tabelle [4.2-T1-1c]) liegen im n_2-ten Schritt am häufigsten Oberschätzungen zwischen 2 % und 60 % (189 Fälle oder 48 %) bzw. Unterschätzungen zwischen 2 % und 40 % (132 Fälle oder 33 %) des jeweiligen Ausgangswertes μ_3^* vor; in 48 Fällen (12 %) liegt eine Oberschätzung um mehr als 60 % vor. Letzteres ist im n_1-ten Schritt 286 mal (72 %) und beim 1. Schritt 307 mal (77 %) der Fall, wobei im 1. Schritt in 256 Fällen (64 %) sogar eine Oberschätzung um mehr als 500 % des jeweiligen Ausgangswertes vorkommt.

Beim 4. Moment (vgl. Tabelle [4.2-T1-1a]) liegen im n_2-ten Schritt am häufigsten Unterschätzungen zwischen 2 % und 40 % (162 Fälle oder 41 %) und Oberschätzungen zwischen 2 % und 50 % (145 Fälle oder 37 %) vor; in 52 Fällen (13 %) liegt in diesem Schritt eine Oberschätzung um mehr als 50 % vor. Letzteres kommt im n_1-ten Schritt in 287 Fällen (72 %) und im 1. Schritt in 301 Fällen (76 %) vor, wobei im 1. Schritt in 254 Fällen (64 %) sogar eine Abweichung um mehr als 500 % festzustellen ist.

Geht man zu einem Vergleich der Schätzungen $\hat{\mu}_r$ (r = 2, 3, 4) für die zentralen Momente mit den jeweils vorgegebenen Momentenwerten μ_r^* (r = 2, 3, 4) über (vgl. Tabellen [4.2-T1-2a, b, c]), so ergeben sich nur leichte Verbesserungen gegenüber den Ergebnissen der Tabellen [4.2-T1-1 b, c, d], was damit zu erklären ist, daß die Schätzungen des 1. Momentes selbst im 1. und n_1-ten Schritt bereits recht gut sind.

Vergleicht man die Schätzungen $\hat{\mu}_r^*$ ($r = 3, 4$) für die standardisierten Momente mit den Ausgangsmomenten μ_r^* ($r = 3, 4$) - siehe Tabellen [4.2-T1-3a, b], [4.2-T1-1a,...,d] -, so ist zunächst für das 3. standardisierte Moment festzustellen, daß im n_2-ten Schritt eine leichte Verbesserung gegenüber den im 1. Schritt erhaltenen Ergebnissen vorliegt, die Ergebnisse des n_1-ten Schrittes jedoch hinter denen des 1. Schrittes zurückstehen. Dieses Resultat, das auf den ersten Blick im Zusammenhang mit den bisherigen Resultaten erstaunlich erscheint, läßt sich dadurch erklären, daß - wie man anhand der Tabellen [4.2-T1-1a, b, c, d] nachvollziehen kann - in den einzelnen Approximationsschritten die (Ober-) Schätzungen für die beiden ersten Momente wesentlich schneller verbessert werden als die der höheren Momente. Für das 4. standardisierte Moment ist zusätzlich anzumerken, daß man im 1. Schritt im allgemeinen eine Unterschätzung zu verzeichnen hat, während sich im n_2-ten Schritt die Zahl der Unter- und der Oberschätzungen in etwa die Waage halten (182 Unter- und 215 Oberschätzungen).

Vergleicht man die Ergebnisse (der vergleichbaren Berechnungen) aus der 1. und der 2. Serie (vgl. Tabellen [4.2-T2]), so sind die der 2. Serie besser als die der 1. Serie. Dies läßt sich damit erklären, daß bei jeder einzelnen Simulationsberechnung nach der Konstruktion der jeweiligen Zerlegung $\mathcal{Z}$ die den einzelnen Intervallen der Zerlegung $\mathcal{Z}$ zuzuordnenden (absoluten) Häufigkeiten h_i (vgl. (4.1-9)) durch ganzzahlige Multiplikation (mit Auf- bzw. Abrundung) der Intervallwahrscheinlichkeiten p_i mit dem vorgegebenen "Stichprobenumfang" n ermittelt wurden und somit wegen des größeren Stichprobenumfangs der 2. Serie genauer angegeben werden konnten. Hierbei sei jedoch noch einmal darauf hingewiesen, daß in unseren Simulationsrechnungen keine Zufallsschwankungen bei den Besetzungszahlen für die einzelnen Intervalle erzeugt wurden. Ferner ist dieses Ergebnis auch dadurch zu erklären, daß unser Gütekriterium (5.1-4a) bei größeren Stichprobenumfängen sensibler ist.

Zur Approximationsgüte der in den einzelnen Schritten ermittelten Approximationsfunktionen an die jeweils vorgegebene Häufigkeitsverteilung läßt sich angesichts der oben vorgenommenen Momentenauswertung sagen, daß diese für die Funktionen aus dem n_2-ten Schritt als recht zufriedenstellend bezeichnet werden darf. Lediglich die Schiefe und die Wölbung (3. und 4. Moment) ließen sich noch leicht verbessern.

Bestätigt wird dieses Ergebnis auch durch die Werte von $X^2_{(n_2)}(\mathcal{Y})$ gem. (4.1-16) im Vergleich zu den Werten $X^2_0(\mathcal{Y})$ und $X^2_1(\mathcal{Y})$ gem. (4.1-1o, 11).

Sowohl die Werte von $X^2_0(\mathcal{Y})$ und $X^2_1(\mathcal{Y})$ als auch die leicht höheren Werte von $X^2_{(n_2)}(\mathcal{Y})$ lagen - bei sechs bzw. sieben Intervallen der Zerlegung $\mathcal{Y}$ - zumeist in dem Bereich zwischen o,o1 und o,o8. Bei diesen Werten ist zu beachten, daß zum einen in unserem Simulationsrechnungen keine Zufallsschwankungen eingebaut wurden und zum anderen die einzelnen Intervalle von $\mathcal{Y}$ mit in etwa gleichen Wahrscheinlichkeitsmassen belegt waren. Die Werte für $X^2_{(k)}(\mathcal{Y})$ gem. (4.1-16) im n_1-ten Schritt waren bei der angegebenen Zahl von Intervallen von $\mathcal{Y}$ i.a. um das Fünfzig- bis Hundertfache größer als die Werte von $X^2_{(n_2)}(\mathcal{Y})$.

Die zur Kontrolle berechneten Werte $X^2_{(n_1)}(\mathcal{F})$ gem. (4.1-17) für die Zerlegung $\mathcal{F}$ waren im n_1-ten Schritt vielfach so hoch, daß der χ^2-Test auf der Zerlegung $\mathcal{F}$ zu einer Ablehnung der im n_1-ten Schritt ermittelten Approximationsfunktion geführt hätte. Dies kam im n_2-ten Schritt nur in einigen wenigen Fällen vor; in diesen Fällen war auch der Wert von $X^2_{(n_2)}(\mathcal{Y})$ gem. (4.1-16) deutlich höher als in der oben angegebenen Größenordnung. Fälle dieser Art traten im wesentlichen an den Rändern der Bereiche der drei Haupttypen (vgl. Zeichnung [4.2-Z1]) auf, wo die Berechnung der Parameterwerte schwierig wurde und die numerische Integration zur Berechnung der Intervallwahrscheinlichkeiten zu ungenau war.

Wir beschränken uns auf die gemachten größenordnungsmäßigen Angaben über die $X^2_{(k)}(\mathcal{Z})$-Werte, da eine Auswertung dieser Werte bei jeder einzelnen Simulation eine Beurteilung der jeweiligen Konstruktion der Zerlegung $\mathcal{Z}$, der Genauigkeit der Berechnung der Parameterwerte, der Genauigkeit der numerischen Integration und evtl. noch weiterer Faktoren und eine entsprechende Unterscheidung erfordern würde und vor allem im Hinblick auf die von uns gewählte doch recht spezielle Konstruktion der Zerlegung $\mathcal{Z}$ wohl nicht sehr aussagefähig wäre. Auf diesen Fragenkomplex werden wir jedoch bei der Besprechung von Anwendungsbeispielen zurückkommen, wo dann auch mit Zufallsschwankungen bei den Besetzungszahlen für die einzelnen Intervalle der vorgegebenen Häufigkeitsverteilung gerechnet werden muß.

Für die von uns durchgeführten Simulationsrechnungen dürfen wir folgendes zusammenfassen:

Es kam darauf an, für (gruppierte) Häufigkeitsverteilungen mit wenigen Intervallen zu zeigen, daß die in 3.3 dargestellte modifizierte, mehrstufige Momentenmethode i.a. bessere Schätzungen für die Parameter von PEARSON-Funktionen liefert als die in 3.1.1 dargestellte (einfache) Momentenmethode. Dies wurde für einen großen Bereich in der (β_1, β_2)-Ebene (vgl. Zeichnungen [4.2-Z1] und [4.2-Z2]) gezeigt. Sehr gut waren die Schätzungen für die beiden ersten Momente, aber auch die Schätzungen für das 3. und das 4. Moment sind als zufriedenstellend zu bezeichnen. Als weiteres Ergebnis unserer Simulationsrechnungen ergab es sich, daß bei guten Approximationen die gem. (4.1-16) berechneten $X^2(\mathcal{Z})$-Werte erheblich unter dem Wert der beim χ^2-Test zu wählenden 5 %-Schranke lagen.

Es wurden in der Regel ca. 5 bis 1o Approximationsschritte benötigt, bis zum ersten Mal (4.1-18a) erfüllt war

(n_1-ter Approximationsschritt), und es waren zumeist zwischen 1o und 2o Approximationsschritte erforderlich, bis zusätzlich (4.1-18b) erfüllt und die Rechnung gestoppt werden konnte (n_2-ter Schritt). Bei der zweiten Serie lagen diese Werte etwas höher. Die Zahl der erforderlichen Approximationsschritte erhöhte sich für Wertekombinationen von β_1 und β_2 aus den Randbereichen der drei Haupttypen (vgl. Zeichnung [2.4-Z1]); sie erhöhte sich zudem auch mit wachsendem β_2 (in beiden Serien).

In Kapitel 5 werden wir nun Anwendungsbeispiele betrachten, die von empirisch ermittelten Häufigkeitsverteilungen ausgehen. Im Zusammenhang mit diesen Anwendungsbeispielen werden wir auch auf Unterschiede zwischen bestimmten empirisch ermittelten Häufigkeitsverteilungen und den bei unseren Simulationsberechnungen vorgegebenen Häufigkeiten aufmerksam machen, die weniger gute Schätzungen zur Folge haben können.

5. Anwendung der in 3.3 dargestellten modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode bei der Approximation von empirisch ermittelten (gruppierten) Häufigkeitsverteilungen durch PEARSON-Funktionen

Aufgrund der Ergebnisse unserer Simulationsberechnungen dürfen wir erwarten, auch bei der Approximation von empirisch ermittelten (gruppierten) Häufigkeitsverteilungen mit Hilfe der in 3.3 dargestellten modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode zu besseren Approximationsfunktionen aus dem PEARSON-System zu gelangen, als es mit Hilfe der in 3.1.1 dargestellten (einfachen) Momentenmethode der Fall ist.

Das werden wir in 5.2 anhand einer ganzen Reihe von Anwendungsbeispielen nachweisen können.

Die wesentlichen Teile des EDV-Programms, das für diese Berechnungen aus dem "Simulationsprogramm" weiter entwickelt wurde und das wir im folgenden kurz als "Anwendungsprogramm" bezeichnen werden, werden wir zuvor in 5.1 kommentieren.

Nach der bereits erwähnten Vorstellung von Anwendungsbeispielen in 5.2 werden wir dann in 5.3 noch Hinweise geben, wie die von uns gewählte Vorgehensweise zum Auffinden einer geeigneten Approximationsfunktion zu einer vorgegebenen empirischen Verteilung evtl. noch weiter verbessert und ausgebaut werden kann.

5.1 Beschreibung des "Anwendungsprogramms"

Das "Anwendungsprogramm" wurde im wesentlichen aus dem "Simulationsprogramm" weiterentwickelt. Es ist ebenfalls in der Programmiersprache ALGOL geschrieben. Eine erste Version des Anwendungsprogramms lief auf einer CONTROL DATA CD 3300 im Rechenzentrum der Universität Saarbrücken; durch den relativ geringen Speicherplatz dieser Anlage waren für diese Version ziemliche Beschränkungen erforderlich. Diese erste Version des Programms wurde umgeschrieben für eine Telefunken TR 440. Wegen des größeren Speicherplatzes der neuen Anlage konnten dann noch zusätzliche Programmteile in die neue Version eingefügt werden. Im folgenden werden wir die wesentlichsten Programmabschnitte dieser zweiten Version darstellen.

Das Programm geht aus von einer vorzugebenden (gruppierten) Häufigkeitsverteilung vom Umfang n mit Intervallen

(5.1-1a) $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ (Zerlegung $\mathfrak{Z}$)

und zugehörigen absoluten Häufigkeiten

(5.1-1b) h_i $(i = 1, \ldots, s)$,

wobei

(5.1-1c) $$\sum_{i=1}^{s} h_i = n.$$

Zur Zerlegung $\mathfrak{Z}$ wird eine feinere Zerlegung $\mathfrak{F}$ konstruiert, indem man die Intervalle $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ jeweils in n_i äquidistante Teilintervalle $(i = 1, \ldots, s)$ aufteilt; dabei werden die n_i wie folgt bestimmt:

Anhand der h_i gem. (5.1-1b) erhält man[1] für $i = 1,\ldots,s$

$$(5.1\text{-}2a)\quad k_i = 2 \cdot \text{entier}\left(\frac{h_i}{n} \cdot 100 + 0{,}5\right)$$

und daraus

$$(5.1\text{-}2b)\quad \min_x = \underset{i}{\text{MIN}}\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{k_i}\right)$$

sowie

$$(5.1\text{-}2c)\quad n_i = \text{entier}\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\min_x} + 0{,}5\right).$$

Falls gilt

$$(5.1\text{-}2d)\quad \sum_{i=1}^{s} n_i > 1500 \quad ,$$

so wird gesetzt (evtl. mehrmals)

$$(5.1\text{-}2e)\quad n_i^{(neu)} = \text{entier}\left(\frac{n_i^{(alt)}}{2} + 0{,}5\right) \quad ,$$

solange bis die Gesamtzahl der Intervalle von $\mathcal{F}$ kleiner als 1500 ist.

Durch das Programm wird dann ferner noch sicher gestellt, daß

$$(5.1\text{-}2f)\quad n_i \geq 1$$

und

$$(5.1\text{-}2g)\quad n_i \leq 100 \qquad (i = 1, \ldots, s) \; .$$

Durch die Konstruktionsanweisung (5.1-2) für die Zerlegung $\mathcal{F}$ wird erreicht, daß die einzelnen Intervalle von $\mathcal{F}$ einigermaßen äquidistant sind. Diese Eigenschaft hat

---

1) Die Funktion entier(x) ordnet jedem reellwertigen Argument x jeweils die größte ganze Zahl z zu, die kleiner oder gleich x ist.

sich für das schnelle Erreichen einer geeigneten Approximationsfunktion in einigen Testläufen als günstig erwiesen. Dieser Programmteil ließe sich jedoch leicht durch einen entsprechenden anderen Teil zur Konstruktion einer anderen Zerlegung $\tilde{f}$ auswechseln.

Für die vorgegebene Häufigkeitsverteilung mit Zerlegung g werden dann zunächst die beiden ersten Momente geschätzt - mittels der (einfachen) Momentenmethode gem. 3.1.1 -, und es wird dann eine Koordinatentransformation ("Standardisierung") der Form

$$X_{(neu)} = \frac{X_{(alt)} - \text{(geschätzter) Mittelwert}}{\text{(geschätzte) Standardabweichung}} \qquad (5.1\text{-}3)$$

durchgeführt, die zur Folge hat, daß bei den späteren Berechnungen die Rechengenauigkeit beträchtlich erhöht wird. In diesem neuen Koordinatensystem werden alle folgenden Berechnungen durchgeführt.

Durch Übergang zu den standardisierten Momenten und Berechnung der Werte für $\varkappa$ gem. (2.1-12), sowie β_1 und β_2 gem. (2.1-6b) wird der zugehörige PEARSON-Typ ermittelt, und es werden dessen Parameterwerte berechnet (vgl. Kapitel 2).

Im Gegensatz zum Simulationsprogramm sind im Anwendungsprogramm nunmehr alle PEARSON-Typen eingebaut, wobei allerdings für die Typen 8, 9, 1o und 11, die dadurch definiert sind, daß bestimmte Parameter bestimmte Werte annehmen, auf eine explizite Kennzeichnung verzichtet wurde.

Mittels numerischer Integration anhand der "aneinandergereihten" SIMPSON-Regel werden - analog zum Simulationsprogramm, vgl. 4.1 und Anhang A2 - auf der Zerlegung $\tilde{\mathcal{F}}$ die den einzelnen Intervallen $< x_{i,j-1}, x_{i,j} >$ ($i = 1, \ldots, s$; $j = 1, \ldots, n_i$) entsprechenden "theoretischen" Wahrscheinlichkeiten $p_{i,j}^{(1)}$ der ermittelten Approximationsfunktion $\hat{f}_{(1)}(x)$ berechnet, und aus diesen werden die Wahrscheinlichkeiten $\tilde{\pi}_{(1),i}$ auf den Intervallen der Zerlegung $\mathcal{J}$ bestimmt.

Dann wird der Wert von $X^2_{(1)}(\mathcal{J})$ gem. (4.1-16) berechnet.

Anhand von (4.1-14) werden für den anschließenden (zweiten) Approximationsschritt die den einzelnen Intervallen von $\tilde{\mathcal{F}}$ zuzuordnenden Häufigkeiten $h_{i,j}^{(2)}$ berechnet. Dann werden mit Hilfe der Zerlegung $\tilde{\mathcal{F}}$ analog zu (4.1-15) die ersten vier Momente (in dem "standardisierten" Koordinatensystem) geschätzt, es wird die dazu passende Approximationsfunktion $\hat{f}_{(2)}(x)$ ermittelt, es werden mittels numerischer Integration die "theoretischen" Intervallwahrscheinlichkeiten für die Zerlegungen $\tilde{\mathcal{F}}$ und $\mathcal{J}$ berechnet, und es wird der Wert von $X^2_{(2)}(\mathcal{J})$ gem. (4.1-16) berechnet, usw..

Analog zum Simulationsprogramm wird die Berechnung nach dem k-ten Approximationsschritt als zufriedenstellend abgebrochen, wenn (vgl. (4.1-18))

(5.1-4a) $X^2_{(k)}(\mathcal{J}) < \chi^2_{krit}$ ($\alpha = 0{,}05$; $s^* - 5$) ("χ^2-Kriterium")

im Sinne des χ^2-Tests bei $s^* - 5$ Freiheitsgraden (wegen der

Schätzung der ersten vier Momente) und wenn

(5.1-4b) $\left| X^2_{(k)}(\vartheta) - X^2_{(k-1)}(\vartheta) \right| < c_{krit}$ ("Konvergenzkriterium").

Bei (5.1-4a) ist zu beachten, daß

(5.1-4c) $s^* = s$,

wenn die Intervalle von ϑ die Bedingungen des χ^2-Tests (vgl. 3.2.1 und 3.2.3) erfüllen; falls gewisse Intervalle zusammengelegt werden müssen, so vermindert sich die Zahl der Freiheitsgrade entsprechend. Intervalle von ϑ werden - allerdings nur zum Zwecke der Berechnung von $X^2_{(k)}(\vartheta)$ - in der für unsere Berechnungen benutzten Programmversion zusammengelegt, wenn

(5.1-4d) $h_i < 5$

oder die "theoretische" Wahrscheinlichkeit eines Invervalls von ϑ

(5.1-4e) $\pi_{(k),i} < 0{,}005$

ist;
falls

(5.1-4f) $s^* < 6$,

wird $X^2_{(k)}(\vartheta)$ nicht berechnet.

Zu (5.1-4b) ist anzumerken, daß wir bei den von uns durchgeführten Berechnungen analog zu den Simulationsberechnungen

einheitlich

(5.1-4g) $C_{krit} = 10^{-2}$

gesetzt haben; dies führte bei Zerlegungen $\mathfrak{Z}$ mit großer Intervallzahl dazu, daß sich die Zahl der Approximationsschritte erhöhte. Evtl. sollte man bei weiteren Berechnungen

(5.1-4h) $C_{krit} = C_{krit}(s)$

bzw.

(5.1-4i) $C_{krit} = C_{krit}(s^*)$

ansetzen und beispielsweise

(5.1-4j) $C_{krit} = 10^{-3} \cdot \chi^2_{krit}$ ($\alpha = 0{,}05$; $s^* - 5$)

wählen.

Wegen der in 3.2.3 zum Ausdruck gebrachten Bedenken bzgl. der Anwendbarkeit des χ^2-Testsund wegen der in den Simulationsrechnungen erhaltenen Ergebnisse werden in der betrachteten Programmversion außer dem Wert von $X^2_{(k)}(\mathfrak{Z})$ gem. (4.1-16) noch weitere Hilfswerte berechnet, die zu einer besseren Beurteilung der Approximationsgüte der jeweils vorliegenden Funktion verhelfen.

Für jedes Intervall der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ bei der Berechnung von $X^2_{(k)}(\mathfrak{Z})$ werden die einzelnen Summanden

(5.1-5a) $$a_i = \frac{(h_i - n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i})^2}{n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}} \qquad (i = 1, \ldots, s^*)$$

angegeben; ferner werden die Differenzen zwischen den empirischen und theoretischen absoluten und relativen Häufigkeiten angegeben

$$(5.1\text{-}5b) \quad d_i^{abs} = h_i - n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$$

und

$$(5.1\text{-}5c) \quad d_i^{rel} = \frac{h_i}{n} - \tilde{\pi}_{(k),i} \qquad (i = 1, \ldots, s^*) .$$

Zusätzlich wird die Zahl der Vorzeichenwechsel dieser Differenzen ermittelt.

Das Programm druckt außerdem auch Angaben aus, die die Güte der durchgeführten numerischen Integration zu beurteilen ermöglichen.

Weiterhin werden durch das Programm in vielen Fällen Warnungen ausgedruckt, wenn sich bei der Berechnung von irgendwelchen Werten "von der Norm" abweichende Situationen ergeben. Auf diese Dinge soll jedoch hier nicht weiter eingegangen werden, obwohl der Einbau gerade solcher Details die bei weitem meiste Zeit bei der Erstellung der vorliegenden Programmversion in Anspruch nahm.

Bei dem Versuch, eine vorgegebene empirische Häufigkeitsverteilung durch eine PEARSON-Funktion zu approximieren,kann es manchmal vorkommen, daß (5.1-4b) bereits erfüllt ist, ohne daß (5.1-4a) erfüllt ist. In einem solchen Fall ist dann wegen (5.1-4b) nicht mehr damit zu rechnen, daß bei einem weiteren Anwenden der mehrstufigen Momentenmethode in einem späteren Schritt noch eine im Sinne von (5.1-4a) akzeptable PEARSON-Verteilung zu der vorgegebenen Häufigkeitsverteilung gefunden werden kann. Bei unseren Simulationsberechnungen konnten wir feststellen, daß (5.1-4a) zwar immer erfüllt war, daß sich jedoch in vielen Fällen die Schätzwerte für die höheren Momente noch recht deutlich von den jeweiligen Ausgangswerten, d.h. von den tatsächlichen Momentenwerten, unterschieden, wenn zusätzlich (5.1-4b) erfüllt war und sich die Rechnung insofern stabilisiert hatte. Berücksichtigt man dieses Ergebnis und zieht man ferner in Betracht, daß in unseren Anwendungsbeispielen empirische Häufigkeitsverteilungen vorliegen, bei denen zusätzlich zu unseren Simulationsbeispielen noch Zufallsschwankungen bei den Besetzungszahlen für die einzelnen Intervalle auftreten und bei denen es zudem sogar ungewiß ist, ob die zugehörige unbekannte theoretische Verteilung überhaupt dem PEARSON-System angehört, oder, falls das nicht der Fall ist, ob sich diese empirischen Verteilungen noch ausreichend gut durch eine PEARSON-Funktion annähern lassen, so wird es unseres Erachtens nach plausibel, daß durch das von uns entwickelte EDV-Programm, wenn nach einem k-ten Schritt (5.1-4b), nicht aber (5.1-4a) erfüllt ist, folgender neuer Startversuch gemacht wird :

Anhand der im k-ten Schritt erhaltenen Schätzungen $\hat{\mu}'_{r,(k)}$ ($r = 2, 3, 4$) für das 2., 3. und 4. Moment werden für den (k+1)-ten Schritt nun die Schätzungen $\hat{\mu}'_{r,(k+1)}$ nicht mehr anhand unserer modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode ermittelt, sondern sie

werden vorgegeben anhand von

$$\hat{\mu}'_{r,(k+1)} = v_r \cdot \hat{\mu}'_{r,(k)} \qquad (r = 2, 3, 4). \tag{5.1-6}$$

In der aktuellen Programmversion haben wir für die v_r $(r = 2, 3, 4)$ folgende Werte angesetzt:

$$v_2 = \begin{cases} 1{,}01 & \text{falls } \hat{\mu}'_{2,(k)} > \hat{\mu}'_{2,(k-1)} \\ 0{,}99 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{5.1-7a}$$

$$v_3 = \begin{cases} 1{,}02 & \text{falls } \hat{\mu}'_{3,(k)} > \hat{\mu}'_{3,(k-1)} \\ 0{,}98 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{5.1-7b}$$

und

$$v_4 = \begin{cases} 1{,}05 & \text{falls } \hat{\mu}'_{4,(k)} > \hat{\mu}'_{4,(k-1)} \\ 0{,}95 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{5.1-7c}$$

Statt der in (5.1-7) angesetzten Werte könnten jedoch auch Werte für die v_r $(r = 2, 3, 4)$ angesetzt werden, die sich mehr an den Ergebnissen unserer Simulationsberechnungen orientieren (vgl. 4.2).

Dieser Neustart des Programms erfolgt somit in der Hoffnung, vielleicht doch noch zu einer bzgl. (5.1-4a) zufriedenstellenden Approximationsfunktion zu gelangen.

Die aktuelle Version unseres EDV-Programms läßt es auch zu, daß man den in 3.3 beschriebenen mehrstufigen Approximationsversuch auch vom 1. Schritt aus startet, und als Startwerte für die ersten vier Momente nicht die anhand der (einfachen) Momentenmethode ermittelten Schätzwerte nimmt, sondern irgendwelche beliebigen Werte vorgibt.

Da man nach dem 1. Schritt die Berechnung abbrechen lassen kann, eignet sich die aktuelle Programmversion somit auch als Testprogramm, wobei dann eine vorzugebende empirische Verteilung mittels χ^2-Test daraufhin überprüft wird, ob sie als Stichprobe einer anhand vorzugebender Werte für die ersten vier Momente definierte PEARSON-Verteilung angesehen werden kann. Hierbei besteht zusätzlich die Möglichkeit, das 1. und eventuell auch zusätzlich noch das 2. Moment aus der empirischen Verteilung - mittels der (einfachen) Momentenmethode - zu schätzen und nur die Werte der höheren Momente als Hypothesenwerte vorzugeben.

Ferner läßt es die bestehende Programmversion auch zu, daß man - bei vorzugebenden und in allen folgenden Berechnungen konstant zu haltenden Werten für das erste und das zweite Moment - Werte für das dritte und vierte standardisierte Moment vorgibt und dann nachprüft, ob gewisse, in der Umgebung dieses Punktes der (β_1,β_2)-Ebene gelegene andere Wertekombinationen für das dritte und vierte standardisierte Moment zu X^2 (φ)-Werten gem. (4.1 - 16) führen, die niedriger sind als der X^2 (φ)-Wert der zunächst vorgegebenen Wertekombination. Ist das der Fall, so kann man die Wertekombination für β_1 und β_2, die zum niedrigsten X^2 (φ)-Wert führte, als neuen Ausgangspunkt für eine weitere Berechnung nehmen und die Umgebung dieses neuen Punktes in der (β_1,β_2)-Ebene untersuchen.

In der aktuellen Programmversion werden jeweils acht auf einer Ellipse - mit beliebig vorgebbarem Haupt- und Nebenradius - um den jeweiligen Mittelpunkt gelegene Punkte untersucht. Hat keiner dieser Punkte aus der Umgebung des betrachteten Mittelpunktes einen geringeren X^2 (φ)-Wert aufzuweisen, so werden acht Punkte auf der Ellipse untersucht, die dadurch bestimmt ist, daß Haupt- und Nebenradius halbiert werden. Die Berechnung wird abgebrochen, wenn eine vorzugebende Rechenzeitschranke überschritten wird. Ist nach Überschreiten dieser Rechenzeitschranke das erreichte Ergebnis noch nicht zufriedenstellend, so kann die Berechnung bei der Wertekombination für β_1 und β_2, bei der sie zuvor abgebrochen wurde, unter Vorgabe einer neuen Rechenzeitschranke fortgesetzt werden, usw.

Kennzeichnen wir den jeweils aktuellen Ellipsenmittelpunkt $P_{(l,o)}$ ($l = 1, 2, 3, \ldots$) in der (β_1, β_2)-Ebene durch das Tupel

(5.1-8a) $$(\beta_1^{(l,o)}, \beta_2^{(l,o)}),$$

so bestimmen sich die acht erwähnten Ellipsenpunkte $P_{(l,j)}$, zu denen wir Werte $\chi^2_{(l,j)}(\gamma)$ gem. (4.1-16) ermitteln, in der aktuellen Programmversion anhand von

(5.1-8b) $$\beta_1^{(l,j)} = \beta_1^{(l,o)} + r_{1,(l)} \cdot \sin\left((i-1) \cdot \frac{\pi}{4}\right)$$

und

(5.1-8c) $$\beta_2^{(l,j)} = \beta_2^{(l,o)} + r_{2,(l)} \cdot \cos\left((i-1) \cdot \frac{\pi}{4}\right)$$

$(l = 1,2,3,\ldots;\ j = 1,\ldots,8);$

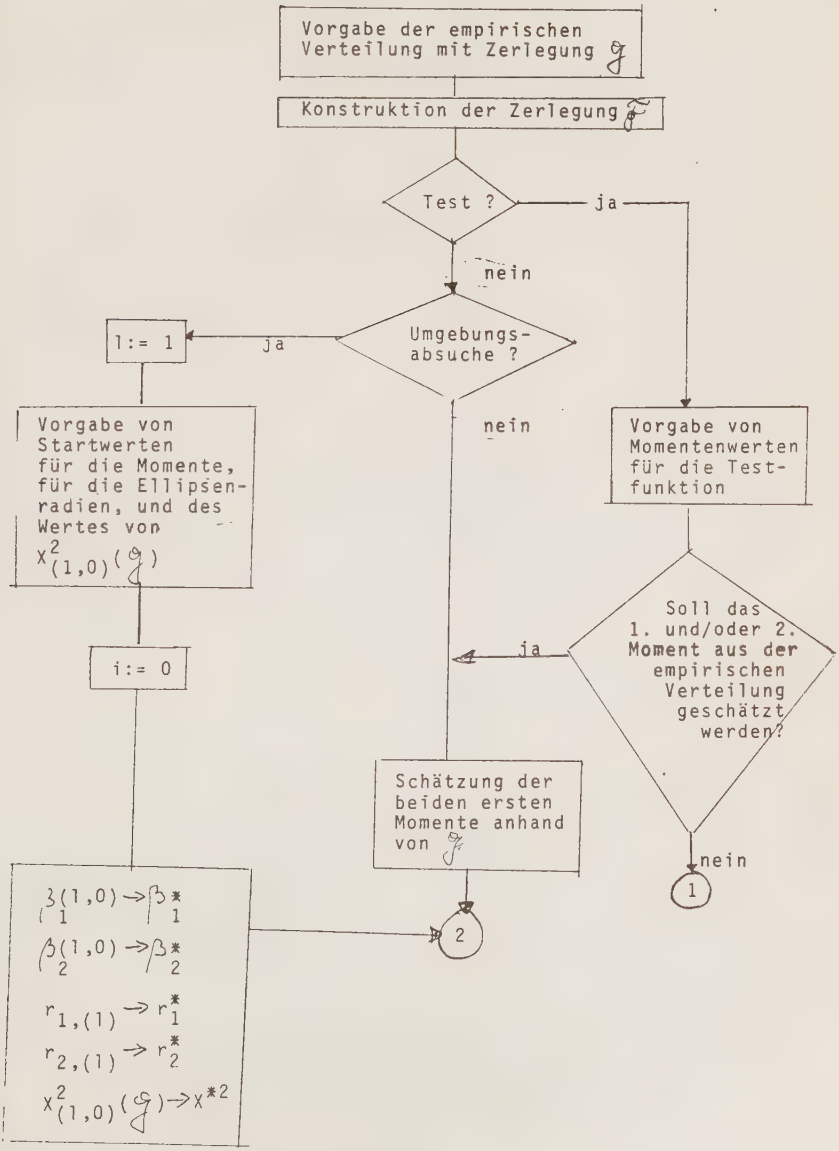
dabei ist $r_{1,(l)}$ der Haupt- und $r_{2,(l)}$ der Nebenradius der jeweiligen aktuellen Ellipse.

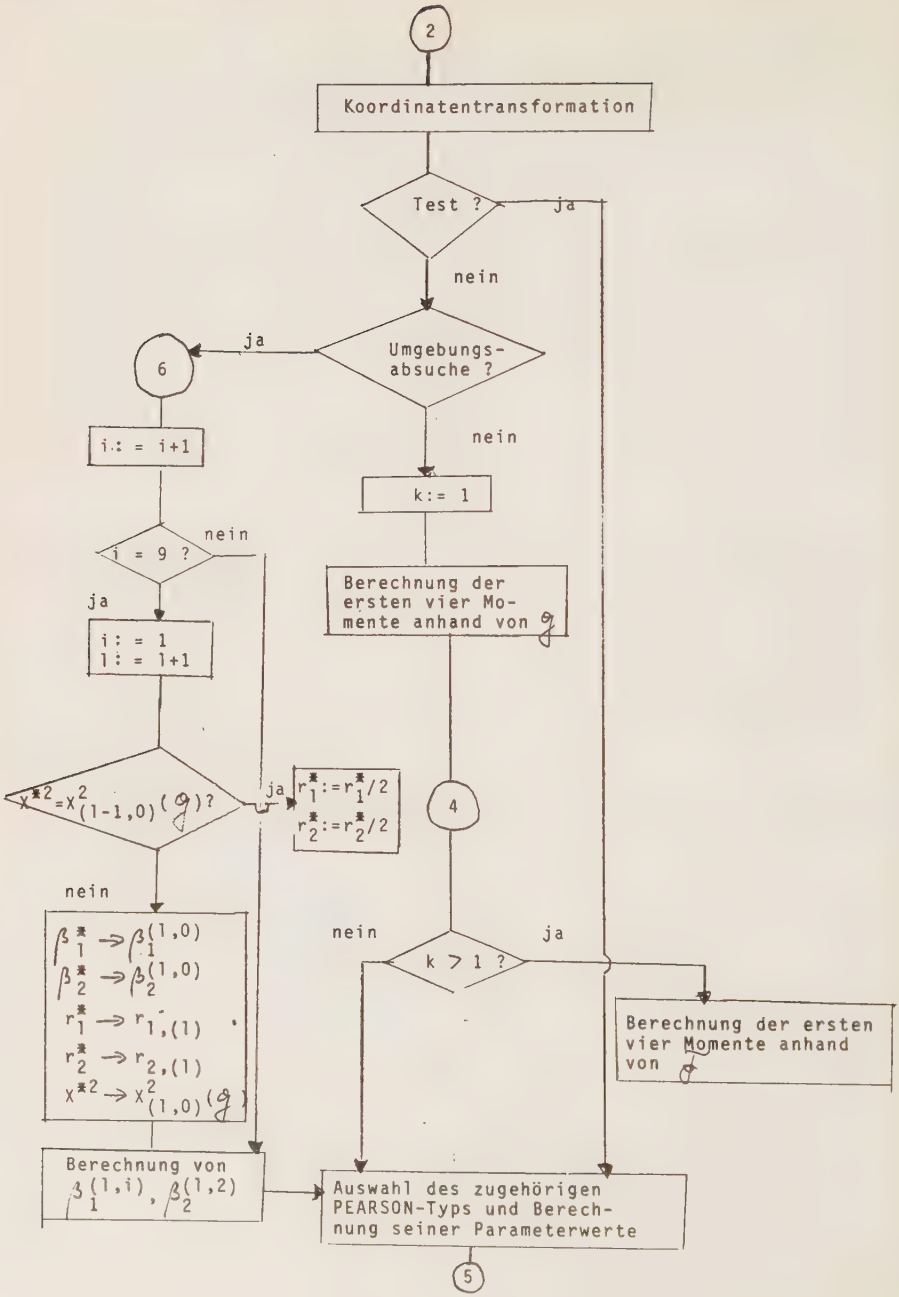
Zu allen diesen Möglichkeiten, die die aktuelle Version des Anwendungsprogramms bietet, werden wir in 5.2 anhand bestimmter Anwendungsbeispiele noch eingehen.

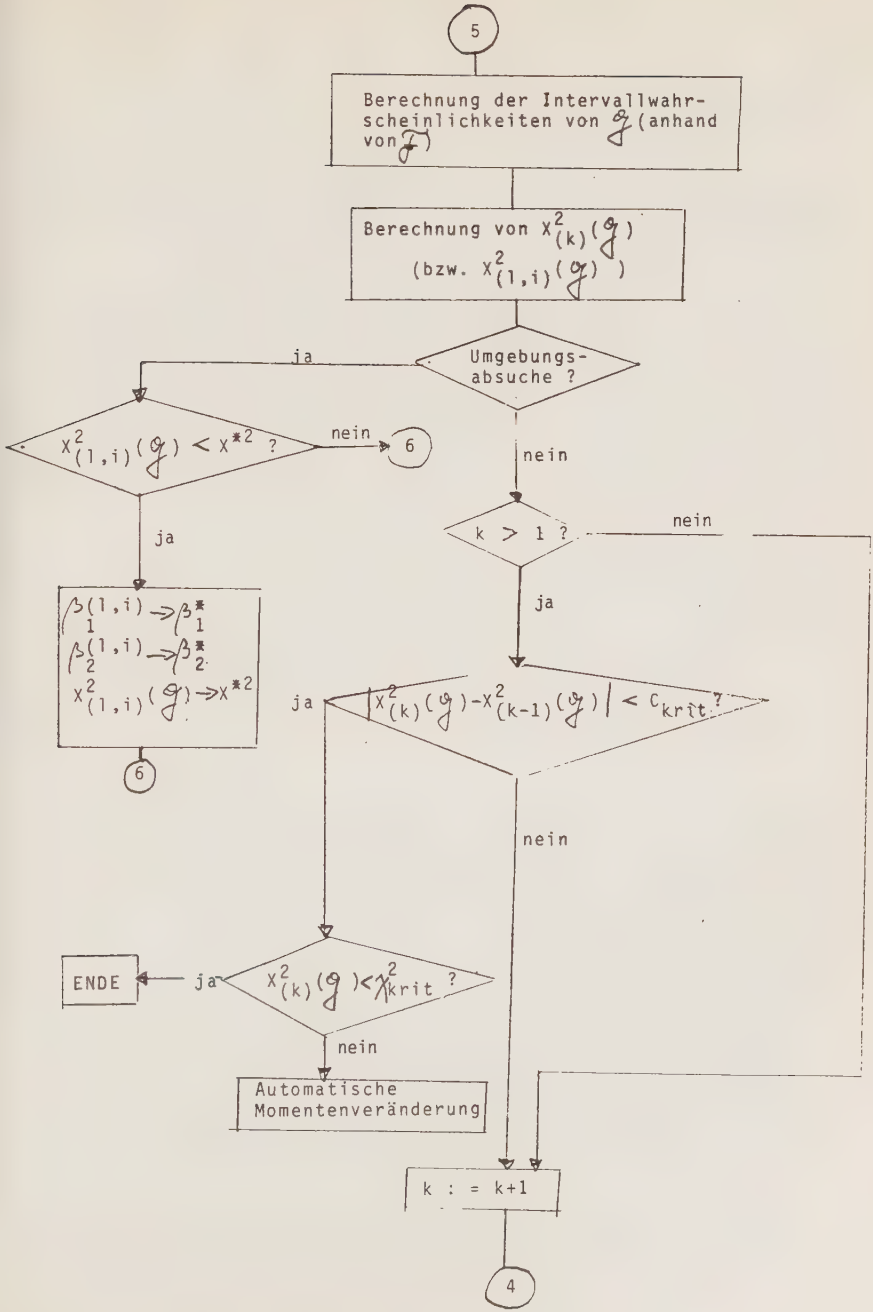
Eine Entscheidung, ob und mit welchen dieser Ergänzungen zu der in 3.3 dargestellten modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode in der benutzten Version unseres EDV-Programms gerechnet werden soll, ist durch Eingabe entsprechender Werte für bestimmte Steuerparameter vor jeder Berechnung zu treffen.

Abschließend sei die von uns für die Berechnungen in 5.2 benutzte Programmversion anhand eines (verkürzten) Flußdiagramms mit den wesentlichsten Programmteilen dargestellt:

Zeichnung [5.1-Z1] : Flußdiagramm mit den wesentlichsten Elementen des "Anwendungsprogramms"




2
Koordinatentransformation
Test ?
ja
nein
Umgebungs-absuche ?
ja
6
nein
i := i+1
k := 1
i = 9 ?
nein
ja
i := 1
l := l+1
Berechnung der ersten vier Momente anhand von g
$x^{*2}=x^2_{(l-1,0)}(g)$?
ja
$r_1^* := r_1^*/2$
$r_2^* := r_2^*/2$
4
nein
$\beta_1^* \to \beta_1^{(l,0)}$
$\beta_2^* \to \beta_2^{(l,0)}$
$r_1^* \to r_{1,(l)}$
$r_2^* \to r_{2,(l)}$
$x^{*2} \to x^2_{(l,0)}(g)$
nein
k > 1 ?
ja
Berechnung der ersten vier Momente anhand von g
Berechnung von $\beta_1^{(l,i)}$, $\beta_2^{(l,2)}$
Auswahl des zugehörigen PEARSON-Typs und Berechnung seiner Parameterwerte
5


5
Berechnung der Intervallwahrscheinlichkeiten von g (anhand von f)
Berechnung von $X^2_{(k)}(g)$ (bzw. $X^2_{(1,i)}(g)$)
Umgebungsabsuche ?
ja
nein
$X^2_{(1,i)}(g) < X^{*2}$?
nein
6
ja
$\beta_{(1,i)}_1 \rightarrow \beta^*_1$
$\beta_{(1,i)}_2 \rightarrow \beta^*_2$
$X^2_{(1,i)}(g) \rightarrow X^{*2}$
6
k > 1 ?
nein
ja
ja
$|X^2_{(k)}(g) - X^2_{(k-1)}(g)| < c_{krit}$?
nein
ENDE
ja
$X^2_{(k)}(g) < \chi^2_{krit}$?
nein
Automatische Momentenveränderung
k : = k+1
4

5.2 Anwendungsbeispiele[1)]

Die nun folgenden Anwendungsbeispiele sind von uns im wesentlichen nach zwei Gesichtspunkten aus einer ganzen Reihe von uns durchgerechneter Beispiele ausgewählt worden.

Zum einen wollen wir anhand dieser Beispiele selbstverständlich zeigen, daß man auch zu empirischen (gruppierten) Häufigkeitsverteilungen mit Hilfe der in 3.3 dargestellten modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode i.a. bessere Approximationsfunktionen aus dem PEARSON-System findet als mit Hilfe der in 3.1.1 dargestellten (einfachen) Momentenmethode.

Zum andern jedoch wollen wir vor allem auch auf gewisse Schwierigkeiten aufmerksam machen, die sich bei diesen Approximationsversuchen in praktischen Anwendungsfällen ergeben können, und Hinweise geben, was beim Auftreten solcher Schwierigkeiten eventuell zusätzlich getan werden kann, um doch noch zu ausreichend guten Approximationsfunktionen zu gelangen.

An die zu approximierenden empirischen (gruppierten) Häufigkeitsverteilungen stellen wir im folgenden lediglich die Anforderung, daß ihre Kurvenform so beschaffen ist, daß eine Approximation durch eine PEARSON-Funktion möglich erscheint, d.h. wir fordern, daß diese Häufigkeitsverteilungen einigermaßen unimodal oder J-förmig oder U-förmig sind. So ist es dann möglich, daß die zugehörige theoretische Verteilung keine PEARSON-Verteilung ist und sich auch nicht genügend gut durch eine PEARSON-Verteilung approximieren läßt oder, daß , selbst wenn die zugehörige - unbekannte - theoretische Verteilung zum PEARSON-System gehört, bei den Besetzungszahlen der einzelnen Klassen unserer jeweiligen empirischen

---

1) Die Ergebnisse zu den hier besprochenen Beispielen findet man in dem beigefügten Anlageband.

Verteilung starke Zufallsschwankungen vorhanden sind, die das Auffinden einer geeigneten PEARSON-Funktion erschweren oder gar unmöglich machen.

Zur Beurteilung der Approximationsgüte einer ermittelten PEARSON-Funktion an eine vorgegebene (gruppierte) Häufigkeitsverteilung, richten wir uns zunächst einmal nach dem Wert von $X^2_{(k)}$ (ϑ) gem. (4.1 - 16). Diesen "Abstand" zwischen der vorgegebenen empirischen und der jeweils ermittelten theoretischen Verteilung versuchen wir von Approximationsschritt zu Approximationsschritt zu verringern. Die Erfüllung von (5.1 - 4a) betrachten wir als Grundvoraussetzung dafür, daß uns eine ermittelte PEARSON-Funktion als Approximationsfunktion zu der jeweils vorgegebenen empirischen Verteilung akzeptabel ist. Der Wert von χ^2 (α = 0,05) bei der jeweiligen Zahl von Freiheitsgraden (vgl. 3.2.1) dient uns somit als ein Richtwert zur Beurteilung der Approximationsgüte, und wir erachten die Approximation einer ermittelten PEARSON-Funktion an eine vorgegebene empirische Verteilung als umso besser, je niedriger der Wert von $X^2_{(k)}$ (ϑ) gemessen an diesem Wert ist.

Wegen der in 3.2.3 bereits geäußerten Bedenken bzgl. einer uneingeschränkten Anwendbarkeit des χ^2-Tests zur Beurteilung der Hypothese, ob die jeweils vorgegebene empirische Häufigkeitsverteilung als Stichprobe einer ermittelten PEARSON-Verteilung angesehen werden kann, werden wir im folgenden jedoch die Erfüllung von (5.1-4a) lediglich als eine Orientierungshilfe ansehen, und wir werden bei der Kommentierung unserer Anwendungsbeispiele auch - von Fall zu Fall - auf andere Kriterien hinweisen, die zur Beurteilung der Approximationsgüte nützlich sind und somit zusätzlich in Betracht gezogen werden sollten.

In diesem Zusammenhang werden wir auch den Einfluß des jeweiligen Stichprobenumfangs und der jeweiligen Art der Zerlegung des Definitionsbereiches einer betrachteten Zufallsvariable ("Gruppierung") auf die Güte unserer Schätzungen und auf den Wert von $X^2_{(k)}$ ($\mathcal{J}$) zu betrachten haben.

Als Nebenprodukt unserer Untersuchungen werden sich einige Vorteile herausstellen, die sich ganz allgemein ergeben, wenn man gruppierte Häufigkeitsverteilungen durch kontinuierliche theoretische Verteilungen approximiert, und es wird sich auch zeigen, daß in der Praxis die unterschiedlichsten Verteilungen hinreichend gut durch eine aus dem PEARSON-System stammende Funktion approximiert werden können und somit das PEARSON-System eine doch recht umfangreiche Familie von (Dichte-)Funktionen ist.

Da das von uns für die jeweiligen Berechnungen benutzte EDV-Programm für jeden Approximationsschritt eine Fülle von Werten ausdruckt, geben wir lediglich in unserem ersten Beispiel [5.2 - B1] alle diese durch das Programm ausgegebenen Informationen wieder und beschränken uns bei allen übrigen Beispielen auf eine Angabe der Werte, die uns in dem jeweiligen Zusammenhang von Interesse erscheinen.

- B1 - Anhand von Beispiel [5.2 - B1] ist nachzuvollziehen, welche (Zwischen-) Ergebnisse und Kontrollangaben für die einzelnen Approximationsschritte durch das in 5.1 beschriebene "Anwendungsprogramm" normalerweise ausgedruckt werden. Dabei ist daraufhinzuweisen, daß die Reihenfolge, in der bestimmte Parameterwerte ausgedruckt werden, nicht unbedingt mit der Reihenfolge übereinstimmt, in der die einzelnen Werte, wie in 5.1 dargestellt, berechnet werden.

Zunächst wird die vorgegebene Häufigkeitsverteilung mit der vorgegebenen Intervallzerlegung $\mathfrak{Z}$ ihres Definitionsbereichs zur Kontrolle ausgedruckt.

Dann werden die - mit Hilfe der (einfachen) Momentenmethode gewonnenen - Schätzungen für den Mittelwert und die Standardabweichung angegeben, mit deren Hilfe die gem. (5.1 - 3) definierte Koordinatentransformation vorgenommen wird.

Sowohl für den 1. Approximationsschritt als auch für alle weiteren Approximationsschritte werden dann - vgl. [5.2 - B1] - Schätzungen $\hat{\mu}'_{r,(k)}$ ($r = 1, 2, 3, 4$; $k = 1, 2, 3, \ldots$) für die ersten vier Momente in dem neuen Koordinatensystem angegeben. Diese werden - vgl. 5.1 - im 1. Approximationsschritt mit Hilfe der (einfachen) Momentenmethode und für alle weiteren Schritte mit Hilfe der modifizierten Momentenmethode (vgl. (3.3 - 1)) gewonnen. Ab dem 2. Schritt wird zusätzlich angegeben, wie sich diese Schätzungen im Vergleich zum vorherigen Schritt verändert haben.

Zur Kontrolle wird dann anschließend der Wert von

(5.2-1)
$$\det \begin{pmatrix} \hat{\mu}'_{0,(k)} & \hat{\mu}'_{1,(k)} & \hat{\mu}'_{2,(k)} \\ \hat{\mu}'_{1,(k)} & \hat{\mu}'_{2,(k)} & \hat{\mu}'_{3,(k)} \\ \hat{\mu}'_{2,(k)} & \hat{\mu}'_{3,(k)} & \hat{\mu}'_{4,(k)} \end{pmatrix}$$

angegeben, der, wie in [34], S. 49 gezeigt wird, immer größer Null sein muß.

Dann werden die Werte für die ersten vier Momente, sowie (nochmals) der Mittelwert und die Standardabweichung im ursprünglich vorgegebenen Koordinatensystem - und ab dem 2. Schritt die Veränderungsraten der einzelnen Werte zu den entsprechenden Werten des vorherigen Schritts - ausgedruckt.

Daran schließen sich die Werte für die zentralen Momente (im neuen Koordinatensystem) und die Werte für die standardisierten Momente an.

Dann wird angegeben, welcher PEARSONsche Funktionstyp vorliegt, der durch die ebenfalls ausgedruckten Werte für $\varkappa$ gem. (2.1 - 12) und β_1 und β_2 gem. (2.1 - 6b) eindeutig definiert ist (vgl. Tabelle [2.4 -T1]).

Gefolgt werden diese Werte von den Werten für die Parameter a, b_0, b_1 und b_2 der PEARSONschen Differentialgleichung (vgl. (2.1 - 7)) sowie den Werten für die Parameter des vorliegenden Funktionstyps im neuen Koordinatensystem. Die Werte für die Parameter des vorliegenden Funktionstyps werden zusätzlich auch für das ursprüngliche Koordinatensystem angegeben.

Die jeweiligen Normierungskonstanten y^* sind dabei so gewählt, daß die ermittelte PEARSON-Funktion als Dichtefunktion aufzufassen ist, d.h. der Wert des Integrals dieser Funktion über ihrem Definitionsbereich ist gleich 1. Will man die ermittelte PEARSON-Funktion als Approxi-

mationsfunktion für die vorgegebene Häufigkeitsverteilung auffassen, so ist y^* noch mit dem vorgegebenen Stichprobenumfang zu multiplizieren.

Nach den obigen Angaben folgen Kontrollangaben bzgl. der numerischen Integration der ermittelten PEARSON-Funktion. Zunächst wird angegeben, wie oft die SIMPSONregel auf dem Definitionsbereich der betrachteten PEARSON-Funktion angewandt wurde, dann wird der mittels unserer numerischen Integration gewonnene Wert des Integrals über dem gesamten Definitionsbereich angegeben. Dabei sei noch einmal daran erinnert, daß die numerische Integration bei allen Approximationsschritten auf den Intervallen der Zerlegung $\mathcal{F}$ durchgeführt wird (vgl. 5.1). Wie die Zerlegung $\mathcal{F}$ aus der vorgegebenen Zerlegung $\mathcal{G}$ konstruiert wurde, ist am Ende des 1. Approximationsschritts angegeben.

Nach der Angabe des Ergebnisses der numerischen Integration über dem gesamten Definitionsbereich werden noch die Ergebnisse der numerischen Integration auf den beiden (Rand-)Intervallen der Zerlegung $\mathcal{F}$ angegeben, auf denen der Wert jeweils zum ersten Mal von Null verschieden ist.

Die dann folgenden Angaben dienen zur Beurteilung der Approximationsgüte der ermittelten PEARSON-Funktion an die vorgegebene Häufigkeitsverteilung (mit Zerlegung $\mathcal{G}$ ihres Definitionsbereichs).

Zunächst werden die Werte für die $X^2_{(k)}(\mathcal{G})$ gem. (4.1 - 16) angegeben (vgl.(5.1 - 7a)), wobei gegebenenfalls gewisse Intervalle der Zerlegung $\mathcal{G}$ zusammengefaßt worden sind (vgl. (5.1 - 4c, d, e, f)), was anhand der angegebenen Randpunkte für die jeweiligen Intervalle, die in (4.1 - 16) berücksichtigt werden, festzustellen ist.

Zusätzlich zu den Beiträgen dieser einzelnen Intervalle zum Wert von $X^2_{(k)}$ (ϑ) werden noch die Differenzen zwischen den absoluten empirischen und theoretischen Häufigkeiten und den relativen empirischen und theoretischen Häufigkeiten angegeben (vgl. (5.1 - 7b,c)).

Es folgt die Angabe der Zahl der Vorzeichenwechsel bei diesen Differenzen.

Anschließend werden die Angaben ausgedruckt, die für eine Durchführung des in 3.2.3 dargestellten χ^2-Tests mit Parameterschätzung von Bedeutung sind, und zwar der vorliegende Stichprobenumfang, die Zahl der Klassen, d.h. s^* (unter Berücksichtigung von (5.1 - 4c, d, e, f)), die Zahl der Freiheitsgrade (d.h. $s^* - 5$, da 4 Momente geschätzt werden), der Wert von $X^2_{(k)}$ (ϑ) gem. (4.1 - 16) und die χ^2-Werte bei der angegebenen Zahl von Freiheitsgraden für die Signifikanzzahlen $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}01$ und $\alpha = 0{,}001$.

Zu diesen letzten Angaben sei zum einen noch einmal auf die nur bedingte Anwendbarkeit des χ^2-Tests mit Parameterschätzung wegen der Verwendung der (einfachen bzw. modifizierten) Momentenmethode hingewiesen (vgl. 3.2.3) und zum andern auch nochmals betont, daß wir uns zwar auch dafür interessieren, ob die vorgegebene Häufigkeitsverteilung als Stichprobe der ermittelten (theoretischen) Verteilung angesehen werden kann, jedoch vielmehr daran interessiert sind, dass die Approximation der ermittelten PEARSON-Funktion an die vorgegebene Häufigkeitsverteilung möglichst gut ist. Letzteres werden wir im folgenden anhand des jeweiligen Wertes der von uns somit mehr als "Abstandsmaß" betrachteten Größe $X^2_{(k)}$ (ϑ) - unter Zuhilfenahme weiterer Beurteilungskriterien - zu beurteilen versuchen.

Für eine Beurteilung der Approximationsgüte auf den einzelnen vorgegeben Intervallen wichtig sind auch die den einzelnen Intervallen der vorgegebenen Zerlegung $\mathfrak{Z}$ zuzuordnenden (theoretischen) Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten der ermittelten PEARSON-Funktion, die ebenfalls durch unser "Anwendungsprogramm" ausgedruckt werden. Im 1. Approximationsschritt werden zusätzlich die Intervallgrenzen der einzelnen Intervalle von $\mathfrak{Z}$ im neuen Koordinatensystem angegeben. Im Anschluß an diese Informationen wird im 1. Approximationsschritt dann auch noch, wie bereits erwähnt, angegeben, wie sich die Zerlegung $\mathfrak{F}$ aus der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ ergibt (vgl. auch (5.1 - 2)).

Zum Abschluß dieser (formalen) Beschreibung der durch das das "Anwendungsprogramm" ausgedruckten Informationen sei - nochmals - daraufhingewiesen, daß gegebenenfalls noch zusätzliche Kontrollwerte und Warnungen ausgedruckt werden. Diese durch das Programm in gewissen Fällen ausgedruckten zusätzlichen Informationen geben im wesentlichen Hinweise auf die Genauigkeit gewisser Rechenschritte. Auf eine Erörterung dieser Zusatzinformationen wollen wir verzichten, da eine solche Erörterung zu sehr zu Details führen würde, die im Rahmen dieser Untersuchung nach unserer Ansicht nicht von Interesse sind. Im einzigen von uns betrachteten Beispiel, in dem wir alle während der Berechnung ausgedruckten Informationen wiedergeben, wurden keine solchen Zusatzinformationen ausgedruckt(vgl. Beispiel [5.2 - B1]), was gleichbedeutend damit ist, daß die Berechnung während der einzelnen Approximationsschritte in diesem Beispiel einen in diesem Sinne normalen Verlauf nahm.

Bei der in unserem ersten Anwendungsbeispiel vorgegebenen Ausgangshäufigkeitsverteilung handelt es sich um eine Aufteilung von Personen, die einem - nicht näher spezifizierten - Krankheitsrisiko ausgesetzt sind, nach ihrem Lebensalter ; dieses Beispiel wurde von uns aus [1] , S.5 (Beispiel 2 aus Tabelle 1) übernommen und stammt ursprünglich, wie dort angegeben, aus WATSON, M.U. Tables, S.19.

Der linke Randpunkt des Definitionsbereichs dieser Verteilung ist in [1] , S.5 nicht explizit angegeben. Da in dem von uns benutzten EDV-Programm ein Wert für diesen Randpunkt angegeben werden muß (vgl. (5.1 - 1a)), damit die Berechnung gestartet werden kann, wurde von uns $x_0 = 0$ angesetzt, was insofern plausibel ist, als damit jedem möglichen Lebensalter eine gewisse Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann, in dem die nicht näher spezifizierte Krankheit auftreten kann.

Im 1. Approximationsschritt werden für die so vorgegebene (gruppierte) Häufigkeitsverteilung - mittels der (einfachen) Momentenmethode - Schätzungen für die ersten vier Momente gewonnen, die zu der angegebenen Approximationsfunktion vom PEARSON-Haupttyp I führen. Diese Funktion ist für uns wegen des erhaltenen Wertes von $X^2_{(1)}(\mathcal{Y})$gem. (4.1 - 16) im Sinne von (5.1 - 4a) als Approximationsfunktion für die vorgegebene Häufigkeitsverteilung nicht akzeptabel. Wie man anhand der Beiträge der einzelnen Intervalle zum Wert von $X^2_{(1)}(\mathcal{Y})$ gem. (4.1 - 16) ersehen kann, läßt die Approximationsgüte der ermittelten PEARSON-Funktion vor allem auf den ersten drei Intervallen der vorgegebenen Zerlegung $\mathcal{Y}$ des Definitionsbereichs der betrachteten Zufallsvariable zu wünschen übrig. Dem ersten Intervall $[0, 19{,}5)$ mit vorgegebener empirischer Häufigkeit h_1 (emp.) = 34 wird eine theoretische Häufigkeit h_1 (theor.) = 87 zugeordnet ; auf dem Intervall

$[19{,}5;\ 24{,}5)$ steht h_2 (emp.) = 145 eine theoretische Häufigkeit von h_2 (theor.) = 104 und auf $[24{,}5;\ 29{,}5)$ steht h_3 (emp.) = 156 eine theoretische Häufigkeit von h_3 (theor.) = 129 gegenüber.

Auf den sonstigen Intervallen ist die Approximationsgüte der ermittelten PEARSON-Funktion bereits akzeptabel - sowohl bei einer Betrachtung der Differenzen zwischen empirischen und theoretischen Häufigkeiten dieser Intervalle, als auch bei Beurteilung der Beiträge dieser Intervalle zum Wert von $X^2_{(1)}$ ($\mathfrak{Z}$).

Ab dem 2. Approximationsschritt wird mit Hilfe der gem. (5.1 - 2) aus der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ gewonnenen Zerlegung $\mathfrak{Z}$, die am Ende der Ergebnisse des 1. Schritts angegeben ist, versucht, mittels der in 3.3 beschriebenen modifizierten Momentenmethode zu besseren Schätzungen für die ersten vier Momente und somit zu einer besseren Approximationsfunktion aus dem PEARSON-System zu gelangen.

Bereits im 2. Approximationsschritt des betrachteten Beispiels erhalten wir eine Approximationsfunktion, für die (5.1 - 4a) erfüllt ist.

In den dann folgenden Schritten kommt man von Schritt zu Schritt zu noch besseren Approximationsfunktionen, was man sowohl anhand der Werte von $X^2_{(k)}$ ($\mathfrak{Z}$) gem. (4.1 - 16) als auch mit Hilfe eines Vergleichs der empirischen Häufigkeiten auf den einzelnen Intervallen von $\mathfrak{Z}$ mit den theoretischen Häufigkeiten der jeweiligen PEARSON-Funktionen feststellen kann. In diesem Beispiel wird die Rechnung nach dem 7. Approximationsschritt abgebrochen, da dann (5.1 - 4b) erstmals zusätzlich zu (5.1 - 4a) erfüllt ist und somit keine weitere (entscheidende) Verbesserung der Approximationsgüte mit Hilfe der modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode erwartet werden kann. Die Approximationsgüte der im 7. Schritt ermittelten PEARSON-Funktion kann dabei als sehr zufriedenstellend bezeichnet werden.

Bei einem Vergleich der Approximationsfunktionen der einzelnen Schritte ist vor allem hervorzuheben, dass der Definitionsbereich dieser Funktionen von $[7.4, 119,0]$ im 1. Schritt über $[15,5, 97,6]$ im 2. Schritt auf $[17,6, 92,5]$ im 7. Schritt zusammenschrumpft und der Wert von s_2 von 2,0 (1. Schritt) über 0,61 (2. Schritt) auf 0,32 (7. Schritt) fällt. Auch der Wert von s_1 verändert sich merklich, doch wird durch seine Veränderung die Kurvenform der einzelnen Approximationsfunktionen nicht so entscheidend beeinflußt. Hierzu vergleiche man die Zeichnungen $[5.2 - B1 - Z1]$, $[5.2 - B1 - Z2]$ und $[5.2 - B1 - Z3]$.

Daß die Approximationsgüte der im ersten Schritt erhaltenen PEARSON-Funktion an die vorgegebene Häufigkeitsverteilung nicht so zufriedenstellend ist, ist auf unseren Ansatz für den Wert des linken Randpunkts der vorgegebenen Häufigkeitsverteilung zurückzuführen. Dieser Ansatz ist zwar wohl am ehesten vertretbar, wenn man, wie bereits ausgeführt, auf die Definition der betrachteten Zufallsvariable zurückgeht, es ist jedoch auch vertretbar, den von Elderton in [1] , S.53 gemachten Ansatz $x_0 = 14,5$ zu betrachten, der wohl darauf zurückzuführen ist, daß bei diesem Ansatz alle Intervalle der vorgegebenen Häufigkeitsverteilung äquidistant sind und daß die empirische Häufigkeit des ersten Intervalls mit h_1 (emp.) = 34 einen Wert aufweist, der diesen Ansatz als nicht unvernünftig erscheinen läßt.

Erklären ließe sich dieser Ansatz auch dadurch, daß Elderton über den Personenkreis, aus dem diese Stichprobe entnommen wurde, nähere Angaben hatte, ohne diese in [1] mitzuteilen; so wäre Eldertons Ansatz für x_0 z.B. dann plausibel, wenn nur erwerbstätige Personen in die betrachtete Stichprobe aufgenommen wurden.

- B2 - Ausgehend von dieser somit leicht modifizierten Häufigkeitsverteilung erhält man (vgl. Beispiel [5.2 - B2]) schon im ersten Schritt - mit Hilfe der (einfachen) Momentenmethode - eine Approximationsfunktion, für die (5.1 - 4a) erfüllt ist. Unsere Berechnung wurde in diesem Beispiel nach dem 6. Schritt aufgrund unserer Stopregel (5.1 - 4a, b) abgebrochen. Die im 6. Schritt von [5.2 - B2] ermittelte PEARSON-Funktion ist praktisch identisch mit der im 7. Schritt von [5.2 - B1] erhaltenen PEARSON-Funktion, wenn man berücksichtigt, daß in (5.1 - 4b) $c_{krit} = 10^{-2}$ (vgl. (5.1 - 4g)) gesetzt wurde.

Bei einem Vergleich der Ergebnisse der beiden genannten Approximationsschritte ist darauf zu achten, dass die zunächst mit Hilfe der einfachen Momentenmethode ermittelten Schätzungen für den Mittelwert und die Standardabweichung der jeweils vorgegebenen Häufigkeitsverteilung wegen der unterschiedlichen Annahmen für den Wert des linken Randpunktes x_0 voneinander abweichen und daß somit unsere Berechnungen in unterschiedlichen Koordinatensystemen durchgeführt wurden,so daß lediglich die Parameterwerte, die sich auf das ursprüngliche Koordinatensystem beziehen, und diejenigen, die sich auf das standardisierte Koordinatensystem beziehen, direkt vergleichbar sind. Direkt vergleichbar sind selbstverständlich auch die jeweiligen relativen und absoluten Häufigkeiten sowie die jeweiligen Angaben im Rahmen des "χ^2-Tests".

In [5.2 - B2] sind lediglich die Ergebnisse des 1. und des 6. Schritts wiedergegeben, die uns in diesem Zusammenhang allein von Interesse erscheinen.

(Nochmals) hervorzuheben ist, daß man in den beiden Beispielen in den Approximationsschritten, in denen jeweils erstmals (5.1 - 4a, b) erfüllt ist, zu Approximationsfunktionen gelangt, die praktisch identisch sind, während sich die jeweils im ersten Schritt mit Hilfe der einfachen Momentenmethode ermittelten Funktionen doch recht deutlich unterscheiden; in beiden Beispielen konnte gegenüber den im ersten Schritt ermittelten Funktionen eine - für das erste Beispiel sogar recht deutliche - Verbesserung der Anpassungsgüte in den darauffolgenden Schritten erzielt werden. Hierzu vergleiche man auch die Zeichnungen [5.2 - B1 - Z1] , [5.2 - B1 - Z2] , [5.2 - B1 - Z3] , sowie [5.2 - B2 - Z1] und [5.2 - B2 - Z2] .

In den nun folgenden Beispielen werden wir, wie bereits erwähnt, nur noch bestimmte, ausgewählte Ergebnisse angeben, die uns in dem jeweiligen Zusammenhang von Interesse erscheinen. Zudem werden wir auch bei der Angabe einzelner Parameterwerte nicht die gesamte, bei den einzelnen Rechenschritten vom Computer ausgedruckte Mantisse (von 12 Ziffern) angeben, sondern i.a. jeweils nur drei bis fünf Ziffern dieser Mantisse angeben. Das kann dazu führen, daß Werte von gewissen Ergebnissen, die man in einzelnen Fällen anhand von anderen angegebenen Werten nachrechnen kann, nicht mehr exakt mit den angegebenen Werten übereinstimmen.

Diese (i.a. nur leichten) Ungenauigkeiten bzgl. der Wiedergabe bestimmter Ergebnisse wollen wir jedoch im folgenden angesichts der großen Zahl von Beispielen und Informationen zu den einzelnen Beispielen in Kauf nehmen, zumal auch, wie wir bereits in 4 und 5.1 erwähnten, Ungenauigkeiten bei einzelnen Rechenschritten, wie z.B. bei der numerischen Integration, auftreten können, die, wenn man sie vermeiden wollte, gegenüber der jetzigen Programmversion erhebliche Erweiterungen des Programms notwendig machen würden und sich dann nachteilig auf die jeweils erforderliche Rechenzeit auswirken würden.

In den einzelnen Beispielen werden zunächst Angaben zur jeweils betrachteten empirischen Verteilung gemacht.

Es folgen die Schätzwerte für den Mittelwert, die Standardabweichung und das 3. und 4. standardisierte Moment aus jeweils ausgewählten Approximationsschritten.

Anhand dieser Werte und der daraus abgeleiteten Werte für die PEARSONschen Koeffizienten β_1, β_2 und $\varkappa$ (gem. (2.1-6b) und (2.1-12)) sind dann der jeweils angegebene PEARSON-Typ und seine - im ursprünglichen Koordinatensystem (vgl. 5.1) - angegebenen Parameterwerte eindeutig bestimmt.

Wird in einem Beispiel zu einer empirischen Verteilung kein Approximationsversuch gemacht, sondern ein Vergleich mit einer dann ebenfalls vorzugebenden PEARSON-Verteilung angestellt, so werden für die oben erwähnten Momente statt der - aus der empirischen Verteilung gewonnenen - Schätzwerte dann jeweils andere, von Beispiel zu Beispiel genau spezifierte Werte angegeben, durch die dann die betrachtete PEARSON-Verteilung eindeutig bestimmt ist.

Anschließend werden den empirischen Häufigkeiten auf den einzelnen vorgegebenen Intervallen die jeweiligen theoretischen Häufigkeiten gegenübergestellt, gefolgt von den aus diesen empirischen und theoretischen Häufigkeiten resultierenden Beiträgen der einzelnen Intervalle zum Wert von $X^2_{(k)}(\vartheta)$ gem. (4.1-16), der ebenfalls angegeben wird.

Zum Schluß folgen noch die Angaben zur Zahl der Freiheitsgrade und zum Wert unserer Orientierungsgröße $\chi^2_s(\alpha = 0{,}05;\ F.G.)$ bzw. eine Angabe über die Zahl der Klassen, anhand derer der Wert von $X^2_{(k)}(\vartheta)$ berechnet wurde (vgl. (5.1-4)).

B3 - In Beispiel [5.2 - B3] liegt als zu approximierende Häufigkeitsverteilung die Verteilung (in Promille) der Arbeiterinnen aus dem Bereich der gesamten Industrie aus Frankreich im Jahre 1972 nach der Höhe ihres Monatsverdienstes (FFR-Klassen) vor; vgl. [28] , Band 3A, S. 104 * f.

Zu dieser Häufigkeitsverteilung kann mit Hilfe der (einfachen) Momentenmethode keine im Sinne von (5.1 - 4a) akzeptable Approximationsfunktion aus dem PEARSON-System gefunden werden - vgl. [5.2 - B3] , 1. Schritt. Mit Hilfe der modifizierten, mehrstufiger Momentenmethode erhält man dann Funktionen, für die (5.1 - 4a) ab dem 3. Schritt erfüllt ist; nach dem 8. Schritt wird die Berechnung wegen zusätzlicher Erfüllung von (5.1 - 4b) abgebrochen.

In allen Schritten sind die jeweiligen Approximationsfunktionen vom PEARSON-Haupttyp II.

Der Wert von $X^2_{(k)}$ (φ) gem. (4.1 - 16) fällt von 18,24 für k = 1 über 7,29 für k = 2, 5,51 für k = 3 und 4,907 für k = 7 auf 4,900 im 8. Schritt bei jeweils zwei Freiheitsgraden - Richtwert : χ^2 (α = 0,05; 2 Freiheitsgrade) = 5,99; bei der Berechnung des Wertes von $X^2_{(k)}$ (φ) wurden jeweils die beiden ersten und die drei letzten Intervalle zusammengefaßt - vgl. (5.1 - 4a). Zum Wert von $X^2_{(8)}$ (φ) ist festzustellen, daß dieser nicht so deutlich niedriger als der angegebene Richtwert ist, wie das in unserem ersten Beispiel und vor allem auch bei unseren Simulationsberechnungen der Fall war.

Anhand der Zeichnungen [5.2 - B3 - Z1,..., 5]
zu den angegebenen Schritten und anhand der Differenzen zwischen den empirischen und jeweiligen theoretischen Häufigkeiten ist zu ersehen, daß die Approximationsfunktion des 8. Schrittes gegenüber der Funktion des 1. Schrittes deutlich besser ist, daß jedoch auch die Funktion des 8. Schritts nicht gerade als optimal bezeichnet werden kann. Aufgrund der Kurvenform dieser Funktion läßt sich schließen, daß der Wert für das 4. Moment und eventuell auch der Wert für das 3. Moment nicht ausreichend gut geschätzt werden konnten.

Auf die Frage, wie man in einem solchen Fall vielleicht zu noch besseren Schätzungen gelangen kann, werden wir erst später eingehen.

B4 - Bei der in [5.2 - B4] betrachteten Häufigkeitsverteilung handelt es sich um die Verteilung von Arbeitern aus der Elektrotechnik in Frankreich im Jahre 1972 nach der Höhe ihres Bruttostundenverdienstes (mit FFR-Klassen) (Quelle : [28] , Band 3A, S.68 * f).

Hier erhält man im 1. Approximationsschritt - mit Hilfe der (einfachen) Momentenmethode - eine PEARSON-Funktion vom Haupttyp II, die sich bei einem Wert für $X^2_{(1)}(\mathcal{Y})$ von 9,67 (bei 15 Freiheitsgraden) im Sinne von (5.1 - 4a) als bereits ausreichend gut erweist.

Die in den dann folgenden Schritten ermittelten Funktionen sind alle vom Haupttyp III (R).

Nach dem 6. Schritt wurde die Berechnung aufgrund unserer Stopregel (5.1 - 4a, b) abgebrochen. Bei diesem Schritt ergibt sich für $X^2_{(6)}(\mathcal{Y})$ ein Wert von 6,42 bei nunmehr nur noch 14 Freiheitsgraden; würde man im 1.Schritt zur Berechnung des Wertes von $X^2_{(1)}(\mathcal{Y})$ die Intervalle der vorgegebenen Zerlegung $\mathcal{Y}$ in der gleichen Weise zusammenfassen, wie es zur Berechnung des Wertes von $X^2_{(6)}(\mathcal{Y})$ geschah, so würde man für $X^2_{(1)}(\mathcal{Y})$ - statt 9,67 - bei nunmehr ebenfalls 14 Freiheitsgraden einen Wert von 8,86 erhalten, der nicht sehr viel über dem Wert von $X^2_{(6)}(\mathcal{Y})$ liegt. Beide Werte liegen jedoch beträchtlich unterhalb unseres Richtwertes $\chi^2(\alpha = 0{,}05;\ 14$ Freiheitsgrade) = 23,68. Die Approximationsgüte sowohl der Funktion des 1. Schrittes, als auch der Funktion des 6. Schrittes ist als recht zufriedenstellend zu bezeichnen, was rein optisch auch anhand der Zeichnungen [5.2 - B4 - Z1] und [5.2 - B4 - Z2] deutlich wird.

Erwähnenswert ist bei diesem Beispiel somit die Tatsache, daß hier Approximationsfunktionen von zwei verschiedenen PEARSON-Typen eine fast ebenbürtige Approximationsgüte aufzuweisen haben.

- B5 - In Beispiel [5.2 - B5] betrachten wir eine antimodale Verteilung. Es handelt sich um eine Verteilung von Bewölkungsintensitäten, die jeweils im Monat Juli in den Jahren 1890 - 1904 (ohne 1901) bei Greenwich nach einer (diskreten) Skala mit möglichen Werten von 0 bis 10 geschätzt wurden; vgl. [3] , I, S.10 und [19] , S.336.

Diese (diskrete) Häufigkeitsverteilung wird in den einzelnen Approximationsschritten jeweils durch eine (kontinuierliche) PEARSON-Funktion vom Haupttyp I (U) approximiert.

Gegenüber dem 1. Schritt, wo wir für $X^2_{(1)}$ (φ) bei 6 Freiheitsgraden einen Wert von 10,23 erhalten, ist für die im 10. Schritt ermittelte Funktion ein Wert für $X^2_{(10)}$ (φ) von 5,00 festzustellen - Richtwert : $\chi^2(\alpha = 0{,}05;\ 6 \text{ Freiheitsgrade}) = 12{,}59$.

Die Verbesserung der Approximationsgüte läßt sich ohne Mühe mit Hilfe eines Vergleichs der jeweiligen Klassenhäufigkeiten und auch rein optisch anhand der Zeichnungen [5.2 - B5 - Z1,2] erkennen.

Anzumerken ist bei diesem Beispiel, daß die numerische Integration anhand der SIMPSON-Regel - vgl. 4.1 und Anhang A 2 - auf den beiden Randintervallen nicht ganz so gut ausfiel, wie wir das von den bisherigen Beispielen her gewohnt sind. Anhand weiterer Testrechnungen haben wir festgestellt, daß die numerische Integration anhand der in 4.1 beschriebenen Vorgehensweise auf einem Randintervall nicht mehr zufriedenstellend ist, wenn der Exponent s_i ($i = 1,2$), der zu dem zugehörigen Randpunkt x_i

gehört (vgl. Formeln für die Haupttypen I (U), I (J), III (R; J) bzw. III (L; J) und für entsprechende Spezialtypen), einen Wert hat, der kleiner als - 0,8 ist. Hierfür ist jedoch nicht nur die von uns gewählte Vorgehensweise nach der SIMPSON-Regel entscheidend, sondern auch die Tatsache, daß wir bei unserer numerischen Integration auf der von uns benutzten Rechenanlage nicht nahe genug an einen solchen Randpunkt herankamen, da sonst der zulässige Zahlenbereich für REAL-Größen verlassen worden wäre - wegen einer zu kleinen Schrittweite h oder wegen zu großer Funktionswerte (vgl. auch 4.1).

Auf dieses Beispiel übertragen bedeutet das, daß der Wert für die theoretische Wahrscheinlichkeit auf dem 11. Intervall noch etwas höher sein dürfte, so daß dann die Werte für $X^2_{(1)}$ (φ) und $X^2_{(10)}$ (φ) noch etwas niedriger sind, als sie von uns angegeben wurden.

Interessant ist an diesem Beispiel ferner, daß nach dem 10. Schritt sich der Wert von $X^2_{(k)}$ (φ) wieder verschlechtert; nach dem 16. Schritt wird die Berechnung aufgrund von (5.1 - 4a, b) gestoppt.

Zwar kann die gegenüber dem 10. Schritt noch etwas schlechtere numerische Integration auf dem 11. Intervall der Grund für die Verschlechterung des Wertes von $X^2_{(k)}$ (φ) sein, doch kann hierfür die Ursache auch vielleicht darin gesehen werden, daß der Definitionsbereich der jeweiligen PEARSON-Funktionen von (- 0,0475, 10,044) im 1. Schritt über (0,156, 9,891) im 10. Schritt auf (0,191, 9,844) im 16. Schritt etwas zu stark zusammengeschrumpft ist. Hierzu vergleiche man nunmehr auch die Häufigkeiten auf dem 1. Intervall.

- B6,B7,B8 - Als nächste empirische Verteilungen betrachten wir drei verschiedene Körpergrößenverteilungen, bei denen sich ähnlich wie in [5.2 - B4] die mit Hilfe der (einfachen) Momentenmethode und die mit Hilfe der modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode ermittelten Funktionen bzgl. der jeweiligen Werte von $X^2_{(k)}$ ($\mathcal{G}$) auch nicht sehr deutlich unterscheiden, die uns jedoch noch in anderer Hinsicht interessant erscheinen. Die drei Körpergrößenverteilungen haben wir aus [3], I, S.8, aus [25], S.204 und aus [26], I, S.35 übernommen.

- B6 - Bei der ersten dieser Verteilungen die wir in [5.2 - B6] zu approximieren versuchen, liegt eine Aufteilung von 8585 Personen auf 21 verschiedene inch-Klassen vor.

In diesem Beispiel ist unsere Stopregel (5.1 - 4a, b) bereits nach dem 3. Schritt erfüllt, was verständlich macht, daß sich die Werte von $X^2_{(1)}$ ($\mathcal{G}$) (= 14,20) und $X^2_{(3)}$($\mathcal{G}$) (= 13,73) - bei jeweils 10 Freiheitsgraden (vgl. (5.1-4)) - nur leicht unterscheiden.

Die Approximationsgüte der Funktionen der betrachteten Schritte, die vom PEARSON-Haupttyp II sind, ist angesichts der großen Zahl von Klassen und des großen Stichprobenumfangs als recht gut zu bezeichnen (Richtwert : $\chi^2(\alpha = 0{,}05;$ 10 Freiheitsgrade) = 18,31), was man z.B. bei einem Vergleich der Abweichungen zwischen den relativen empirischen und theoretischen Häufigkeiten d_i^{rel} (vgl. (5.1 - 5c)) mit den entsprechenden Abweichungen bei anderen Beispielen leicht feststellen kann.

B7 - Beispiel [5.2 - B7] - mit der zu approximierenden Körpergrößen verteilung II (mit cm-Klassen) - ist vor allem insofern interessant, als hier der Wert von $X^2_{(k)}$ (ϑ) gem. (4.1 - 16) vom 1. zum 5. und - wegen (5.1 - 4a, b) - letzten Schritt sogar leicht ansteigt, und zwar von 1,35 für k = 1 auf 1,46 für k = 5 bei jeweils 2 Freiheitsgraden (Richtwert : $\chi^2(\alpha = 0{,}05;$ 2 Freiheitsgrade) = 5,99).

Vergleicht man in diesem Beispiel die jeweiligen theoretischen Intervallhäufigkeiten der beiden genannten Schritte mit den jeweiligen vorgegebenen empirischen Häufigkeiten, und vergleicht man in den beiden Schritten auch die Beiträge der einzelnen Intervalle zum Wert von $X^2_{(k)}$ (ϑ), so stellt man fest, daß im 1. Schritt die Anpassung der ermittelten PEARSON-Funktion - vom Haupttyp I - an die vorgegebene Häufigkeitsverteilung auf den Randintervallen (1. bzw. 7. und 8. Intervall) besonders gut ist, wohingegen die im 3. Schritt gefundene PEARSON-Funktion, die ebenfalls vom Haupttyp I ist, auf den restlichen Intervallen, wo etwa 90 % der vorgegebenen Häufigkeitsmasse liegen, eine bessere Anpassung aufzuweisen hat; der Beitrag dieser Intervalle I_i (i = 2,..., 6) zum Wert von $X^2_{(k)}$ (ϑ) beläuft sich im 1. Schritt auf 1,34 und im 3. Schritt auf 0,98.

Dieses Ergebnis verdeutlicht uns die Eigenschaft des von uns gewählten Abstandsmaßen $X^2_{(k)}$ (ϑ) gem. (4.1 - 16), bei in etwa gleichen Abweichungen zwischen empirischen und theoretischen Häufigkeiten auf verschiedenen Intervallen besonders deutlich auf den Intervallen an Wert zuzunehmen, denen nur eine relativ geringe theoretische Wahrscheinlichkeit zukommt.

Diese Eigenschaft ist wohl i.a. immer wünschenswert, doch zeigt dieses Beispiel, daß, wenn man sich nur auf den Wert von $X^2_{(k)}$ (φ) verlassen würde, die auf dem weitaus größten Teil des Definitionsbereichs der betrachteten Zufallsvariable bessere Approximationsfunktion - bei auch noch erträglichen Abweichungen auf den restlichen Teilen - auch einmal als schlechter eingestuft werden kann, als es vielleicht nach einer objektiveren Beurteilung der Fall sein sollte.

- B8 - Zu unserer dritten Körpergrößenverteilung (mit cm -Klassen) die wir in [5.2 - B8] betrachten, erhalten wir im 1. Schritt eine Approximationsfunktion vom Haupttyp II und in den dann folgenden Schritten Funktionen vom Haupttyp I. Wie in den beiden voranstehenden Beispielen ist (5.1 - 4a) auch hier bereits im 1. Schritt und (5.1 - 4b) auch schon sehr früh - nach dem 4. Schritt - erfüllt. Auch hier unterscheiden sich die Werte für $X^2_{(k)}$ (φ) im 1. Schritt (= 7,18) und im 4. Schritt (= 6,21) nicht sehr - bei jeweils 8 Freiheitsgraden und einem Richtwert von χ^2 (α= 0,05; 8 F.G.) = 15,51.

Vergleicht man die Schätzwerte für β_1 und β_2 gem. (2.1 - 6b) für die einzelnen, in [5.2 - B6, 7, 8] erwähnten Schritte und ordnet man die jeweiligen Wertetupel ($\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$) in der ($\beta_1, \beta_2$) - Ebene (vgl. Zeichnung [2.4 - Z1]) ein, so stellt man fest daß die jeweiligen Punkte ($\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$) zum einen nicht weit von einander entfernt sind und zum andern alle in der Nähe des Punktes (0,3), durch den die Normalverteilung (vgl. PEARSON-Typ 0 in 2.3.1) eindeutig festgelegt ist, sowie von Punkt zu Punkt mehr oder weniger in der Nähe einer der Linien liegen, durch die die PEARSON-Typen 2, 3, 5 und 7 (vgl. 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4 und 2.3.5) definiert sind.

So ist es dann interessant, der Frage nachzugehen, ob sich die vorgegebenen empirischen Häufigkeitsverteilungen auch noch ausreichend gut durch die zu den jeweils anderen empirischen Verteilungen ermittelten PEARSON-Funktionen approximieren lassen, und andererseits auch zu untersuchen, ob sich die einzelnen Häufigkeitsverteilungen ausreichend gut durch einen der genannten PEARSONschen Spezialtypen approximieren lassen.

Letzteres ist oft von Vorteil, wenn man in einem mathematischen Modell irgendwelche Zufallsvariablen betrachtet, zu denen man die zugehörige theoretische Verteilung anhand vorliegender Stichproben zu bestimmen hat, und wenn man dann feststellen kann, daß diese Zufallsvariablen ganz bestimmten Wahrscheinlichkeitsgesetzen gehorchen, die eine besonders leichte mathematische Behandlung erlauben.
Dies ist bei den PEARSONschen Spezialtypen der Fall, die gegenüber den PEARSONschen Haupttypen mit Hilfe strukturell einfacherer Formeln zu beschreiben sind, in denen zudem auch weniger Parameter vorkommen.

- B9 - Im Beispiel [5.2 - B9] untersuchen wir, ob sich unsere erste Körpergrößenverteilung, die wir in [5.2 - B6] betrachteten, ausreichend gut - im Sinne von (5.1 - 4a) durch die Normalverteilung approximieren läßt. Dazu sind Schätzungen für den Mittelwert μ' und die Standardabweichung σ erforderlich. Wir haben uns dafür entschieden, zwei Sätze von Schätzwerten zu betrachten :

(1) die Schätzwerte für μ' und σ anhand der (einfachen) Momentenmethode (vgl. [5.2-B6], 1. Schritt)

und

(2) die Schätzwerte für μ' und σ aus dem beim Vorgehen nach der modifizierten, mehrstufigen, Momentenmethode - bzgl. (5.1 - 4a, b) letzten Schritt (vgl. [5.2 - B6], 3. Schritt).

Beim χ^2-Test, der hier ohne die in 3.2.3 erwähnten Bedenken durchgeführt werden kann, da sich im Fall der Normalverteilung die Schätzungen für μ' und σ anhand der Momentenmethode und anhand der Maximum-Likelihood-Methode entsprechen, erhält man für die beiden Wertesätze X_0^2 ($\hat{=}$)-Werte von 19,88 bzw. 19,21 (vgl. [5.2 - B9]), die höher sind als die entsprechenden Werte aus [5.2 - B7] - 14,20 bzw. 13,73 -, die aber dennoch bei nunmehr 12 Freiheitsgraden und einem χ^2 (α= 0,05; 12 F.G.) - Wert von 21,03 zu einer Annahme der Nullhypothese berechtigen, daß die betrachtete empirische Verteilung als Stichprobe der durch die beiden Wertesätze eindeutig definierten Normalverteilungen betrachtet werden kann. Erwähnenswert ist bei diesem Beispiel die Tatsache, daß die Nullhypothese abgelehntworden wäre, wenn die gleiche Zahl von Freiheitsgraden wie in [5.2 - B6] vorliegen würde - Richtwert χ^2 (α= 0,05; 10 F.G.).

Hätte man sich nun zwischen den in [5.2 – B6] und [5.2 – B9] ermittelten Approximationsfunktionen zu entscheiden, so wird man eine solche Entscheidung wohl immer von Fall zu Fall treffen und sich zum einen an der Approximationsgüte, die anhand des Wertes von X_0^2 ($\hat{=}$) und weiterer Kriterien, auf die wir z.T. schon eingegangen sind, zu beurteilen wäre, und zum anderen auch daran orientieren, wofür man diese Approximationsfunktion verwenden will und wie man mit ihr arbeiten kann.

Statt, wie in [5.2 - B9] geschehen, nachzuprüfen, ob sich eine unserer drei Häufigkeitsverteilungen im Sinne von (5.1 - 4a) ausreichend gut durch die Normalverteilung approximieren läßt, könnte man nun genauso auch nachprüfen, ob sich eine dieser Verteilungen auch ausreichend gut durch einen der anderen PEARSONschen Spezialtypen approximieren läßt, wobei für dessen Parameter anlog zu [5.2 - B9] mehrere Sätze von Schätzwerten untersucht werden könnten, und diese Schätzwerte durch das EDV-Programm aufgrund vorgegebener (Schätz-)Werte für die ersten vier Momente berechnet würden. Dies wollen wir jedoch nicht tun, da es uns im Rahmen dieser Untersuchung nur darauf ankam, auf diese bestehenden Möglichkeiten hinzuweisen und insbesondere auch darauf aufmerksam zu machen, daß auch hier mittels der modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode gewonnene Schätzungen für die Momente eventuell zu besseren Ergebnissen führen können als mittels der (einfachen) Momentenmethode gewonnene Schätzungen.

- B10,B11 - Dennoch werden wir in den beiden nächsten Beispielen (vgl. [5.2 - B10,11]) etwas ähnliches tun wie in [5.2 - B9]. Dabei beschäftigen wir uns mit einem wohl weitverbreiteten statistischen Problem, nämlich daß man oft zu einem bestimmten Merkmal verschiedene unabhängige und bereits gruppierte Stichproben vorliegen hat und diese nun miteinander vergleichen möchte.

Stimmen bei den verschiedenen empirischen Häufigkeitsverteilungen die Klasseneinteilungen überein oder existiert eine Klasseneinteilung, in die alle diese vorgegebenen Klasseneinteilungen überführbar sind, so hat man mit Hilfe des χ^2-Kontingenztests (vgl. z.B. [15], S. 441 ff, [16], S. 529 ff oder [30], II, S. 177 ff) die Möglichkeit, nachzuprüfen, ob hinter allen diesen Stichproben das gleiche Wahrscheinlichkeitsgesetz steht, wobei dieses dann allerdings nicht näher spezifiziert wird.

Hat man nun bei zwei empirischen Verteilungen Klasseneinteilungen, die nicht miteinander kompatibel sind, so läßt sich oben genannter Test nicht mehr durchführen. Dieser Fall liegt jedoch sehr oft vor, vor allem wenn das jeweils betrachtete Merkmal bei Ermittlung der verschiedenen Meßserien in unterschiedlichen Maßsystemen, wie z.B. DM und FFR, Grad Celsius und Grad Fahrenheit, km und Meilen, und ähnlichem mehr gemessen wurde.

So liegt auch für unser Merkmal "Körpergröße" in unserer ersten betrachteten Verteilung eine Aufteilung des Meßbereichs in inch-Klassen und bei unserer dritten eine Aufteilung des Meßbereichs in cm-Klassen vor, die - auch nach einer Umrechnung von inch in cm oder umgekehrt - beide miteinander unverträglich sind.

In [5.2 - B6] und [5.2 - B8] haben wir zu diesen beiden Häufigkeitsverteilungen jeweils uns genügend gut erscheinende kontinuierliche Approximationsfunktionen gefunden und uns dabei von den beiden vorgegebenen Klasseneinteilungen gelöst. Ferner haben wir auch festgestellt, daß zu jeder dieser Stichproben eine ganze Reihe von PEARSON-Funktionen - mit speziellen Parameterwerten - existiert, für die unser Gütekriterium - mehr oder weniger gut - erfüllt ist.

So ist es dann interessant, der Frage nachzugehen, ob es eventuell PEARSON-Funktionen mit speziellen Parameterwerten gibt, die für beide Stichproben bzgl. (5.1 - 4a) als Approximationsfunktionen akzeptabel sind. Da es nun jedoch wohl auch unmöglich sein dürfte, zu einer vorgegebenen empirischen Verteilung die Menge aller bzgl. (5.1 - 4a) akzeptablen PEARSON-Funktionen mit speziellen Parameterwerten im Parameterraum zu bestimmen, wollen wir uns in [5.2 - B10,11] auf die folgende Vergleichsmöglichkeit beschränken:

Nachdem wir zu einer der empirischen Verteilungen eine ausreichend gute Approximationsfunktion - aus dem PEAR-

SON-System - ermittelt haben, interessieren wir uns nun für den Wert unseres Abstandsmaßes X_0^2 (φ) zwischen dieser theoretischen Verteilung und der anderen empirischen Verteilung. Dabei ist festzuhalten, daß die theoretische Verteilung eindeutig bestimmt ist durch die aus der anderen empirischen Verteilung gewonnenen Schätzwerte für die ersten vier Momente.

Variieren können wir diesen - ersten - Vergleich dadurch, daß wir unsere zweite empirische Verteilung lediglich mit der zu der ersten Verteilung ermittelten zugehörigen zentralisierten PEARSON-Funktion vergleichen. Dies erfordert die Schätzung des ersten Momentes aus der zweiten empirischen Verteilung und eine entsprechende Koordinatentransformation bei der vorliegenden PEARSON-Funktion.

Eine dritte Vergleichsvariante besteht darin, daß wir unsere zweite empirische Verteilung lediglich mit der standardisierten PEARSON-Funktion in Verbindung bringen. Hier sind dann der Mittelwert und die Standardabweichung aus der zweiten empirischen Verteilung zu schätzen.

Während somit bei unserer Vergleichsart (1) die zweite empirische Verteilung mit der PEARSON-Funktion verglichen wird, die eindeutig durch die Schätzungen für die ersten vier Momente aus der ersten empirischen Verteilung bestimmt ist, wird bei Vergleichsart (2) die zweite empirische Verteilung verglichen mit der PEARSON-Funktion, die bestimmt ist durch den Schätzwert für das 1. Moment aus der zweiten empirischen Verteilung und die Schätzwerte für die zentralen 2., 3. und 4. Momente aus der ersten empirischen Verteilung, und schließlich wird in unserer Vergleichsart (3) unsere zweite empirische Verteilung in Verbindung gebracht mit der PEARSON-Funktion, die definiert ist durch die Schätzwerte für den Mittelwert und die Standardabweichung der zweiten empirischen Verteilung und die Schätzwerte für das standardisierte 3. und 4. Moment aus der ersten empirischen Verteilung.

- B10 - In [5.2 - B10] vergleichen wir unsere Körpergrößenverteilung III mit der zu unserer Körpergrößenverteilung I in [5.2 - B6], Schritt 3. ermittelten PEARSON-Funktion.

Bei Vergleichsart (1) ergibt sich für unser Abstandsmaß X_0^2 (g) ein Wert von 496,20, der anhand der Beiträge von $s^* = 13$ Intervallen ermittelt wurde. Bei den Vergleichsarten (2) bzw. (3) ergeben sich für X_0^2 (g) Werte von 17,46 und 5,85 - auf jeweils ebenfalls $s^* = 13$ Intervallen.

Vergleicht man diese Werte mit dem Wert von $X^2_{(4)}$ (g) (= 6,21) und dem zugehörigen Richtwert von $\chi^2(\alpha = 0{,}05;$ 8 F.G.) = 15,51, so ist festzustellen, daß die in unserem Vergleich (3) betrachtete PEARSON-Funktion sogar noch zu einem besseren X_0^2 (g)-Wert führt als die im 4. Schritt in [5.2 - B8] ermittelte PEARSON-Funktion.

Zum Wert von X_0^2 (g) aus Vergleich (2) ist anzumerken, daß dieser leicht über unserem Richtwert $\chi^2(\alpha = 0{,}05;$ 8 F.G.) liegt. Würde man sich bei Vergleichsart (2) auf den Standpunkt stellen, daß dadurch, daß aus unserer zweiten empirischen Verteilung nur der Mittelwert geschätzt wurde, statt 8 Freiheitsgrade 11 Freiheitsgrade vorliegen, so wäre die Funktion aus Vergleich (2) wegen eines Richtwertes von $\chi^2(\alpha = 0{,}05;$ 11 F.G.) dann sogar eine bzgl. unseres Gütekriteriums (5.1 - 4a) akzeptable Approximationsfunktion.

Auf jeden Fall nicht akzeptabel als Approximationsfunktion zu unserer Körpergrößenverteilung III ist jedoch die Funktion aus unserer Vergleichsart (1), was wohl auf die zu unterschiedlichen Mittelwerte der beiden Verteilungen zurückzuführen ist (vgl. hierzu auch [33], S. 210 und 211).

- B11 - Bringen wir umgekehrt (vgl. [5.2 - B11]) unsere Körpergrößenverteilung I in einen Vergleich mit der PEARSON-

Funktion zu unserer Körpergrößenverteilung III aus [5.2 - B8], Schritt 4, so ergeben sich für X_0^2 (σ) bei den drei Vergleichsarten Werte von 12463,65 bzw. 348,74 bzw. 38,38, wobei bei den Vergleichsarten (2) und (3) die Schätzwerte für den Mittelwert bzw. für den Mittelwert und die Standardabweichung aus [5.2 - B6], Schritt 3 betrachtet wurden. Alle drei Funktionen sind wegen der obigen Werte für X_0^2 (σ) bzgl. unseres Gütemaßes (5.1 - 4a) nicht als Approximationsfunktionen zu unserer Körpergrößenverteilung I akzeptabel.

Das Ergebnis von Vergleichsart (3) im Vergleich zum Ergebnis der gleichen Vergleichsart in [5.2 - B10] läßt sich wohl dadurch erklären, daß in unserer Körpergrößenverteilung I ein wesentlich größerer Stichprobenumfang vorliegt, so daß die Menge der zu dieser Stichprobe bzgl. (5.1 - 4a) in Frage kommenden PEARSON-Verteilungen erheblich kleiner sein dürfte als die entsprechende Menge zur Körpergrößenverteilung III. Zum andern zeigt auch speziell das Ergebnis von Vergleichsart (3) in [5.2 - B10] - und von [5.2 - B8] -, daß unsere modifizierte, mehrstufige Momentenmethode i.a. zwar Vorteile gegenüber der (einfachen) Momentenmethode aufweist, jedoch keinesfalls als optimal zu bezeichnen ist.

Zu den in [5.2 - B10,11] angestellten Vergleichen ist anzumerken, daß diese auf keinen Fall als exakte Tests anzusehen sind. Da aber für die Frage, wie empirische Verteilungen mit nicht kompatibler Klasseneinteilung für ein bestimmtes Merkmal daraufhin untersucht werden können, ob hinter diesen Stichproben ein mögliches gemeinsames Wahrscheinlichkeitsgesetz steht, keine genauen Verfahren zur Verfügung stehen, ist die dargestellte Vorgehensweise wohl doch ein recht gutes Hilfsmittel auf dem Wege zu einer Antwort auf diese Frage.

- B12 - Das nun folgende Beispiel [5.2 - B12] steht stellvertretend für die wohl meisten Fälle, in denen man vergeblich versucht, zu einer vorgegebenen empirischen (gruppierten) Häufigkeitsverteilung mit einem verhältnismäßig großen Stichprobenumfang eine im Sinne von (5.1 - 4a) akzeptable Approximationsfunktion aus dem PEARSON-System zu finden. In diesem Beispiel betrachten wir eine weitere (vierte)Körpergrößenverteilung, die aus [26], I, S. 139 stammt und einen Stichprobenumfang von n = 25878 aufzuweisen hat.

Wie wir aus [5.2 - B12] ersehen können, mußten unsere Approximationsversuche nach dem 9. Schritt abgebrochen werden, da (5.1 - 4b) zwar erfüllt ist wegen $X^2_{(8)}(\vartheta) = 112{,}73$ und $X^2_{(9)}(\vartheta) = 112{,}72$, andererseits bei einem Richtwert für χ^2 ($\alpha = 0{,}05$; 10 F.G.) von 18,31 jedoch unser Gütekriterium (5.1 - 4a) noch lange nicht erfüllt ist.

Berechnet man die Abweichungen zwischen den vorgegebenen relativen empirischen Häufigkeiten der vorgegebenen Körpergrößenverteilung IV und den durch die im 9. Schritt von 5.2 - B12 ermittelte PEARSON-Funktion festgelegten theoretischen Wahrscheinlichkeiten auf den einzelnen vorgegebenen Intervallen der betrachteten Zufallsvariable, so stellt man fest, daß diese größenordnungsmäßig durchaus vergleichbar und z.T. sogar geringer sind als etwa die entsprechenden Abweichungen in [5.2 - B6, 7, 8], wo (5.1 - 4a) jeweils erfüllt ist, jedoch speziell bei den Körpergrößenverteilungen II und III ein weitaus geringerer Stichprobenumfang vorliegt.

- B13 - Der Eindruck, daß in [5.2 - B12] der sehr große Stichprobenumfang daran schuld ist, daß trotz - gemessen an sonstigen Beispielen mit allerdings geringerem Stichprobenumfang - erträglicher Abweichungen zwischen den relativen empirischen und theoretischen Häufigkeiten (5.1 - 4a) nicht erfüllt ist, läßt sich recht gut anhand von [5.2 - B13] nachweisen. In diesem Beispiel wird die durch Division durch 10 (mit Auf- bzw. Abrundung)

der einzelnen Intervallhäufigkeiten der Körpergrößenverteilung IV entstehende "empirische" Häufigkeitsverteilung mit dem immer noch recht großen "Stichprobenumfang" von n = 2590 mittels (5.1 - 4a) daraufhin getestet, ob sie als Stichprobe der im 9. Schritt von [5.2 - B12] ermittelten theoretischen PEARSON-Verteilung angesehen werden kann.

Dabei ergibt sich für χ_0^2 (φ) ein Wert von 10,79, so daß in der Tat (5.1 - 4a) erfüllt ist.

Das Ergebnis von [5.2 - B11,12,13] verdeutlicht die Forderung an eine - im Sinne von (5.1 - 4a) - ausreichend gute Approximationsfunktion, nämlich daß diese umso besser an die vorgegebene Häufigkeitsverteilung angepaßt sein muß, je größer der Stichprobenumfang ist. Das ist auch unmittelbar einsichtig, wenn man unser Abstandsmaß $\chi^2_{(k)}$ (φ) gem. (4.1 - 16) in der Form

(5.2-2) $$\chi^2_{(k)}(\varphi) = n \cdot \sum_{i=1}^{s} \frac{\left(\frac{h_i}{n} - \tau_{(k),i}\right)^2}{\tau_{(k),i}}$$

betrachtet und im Zusammenhang mit (5.1 - 4a) sieht.

Diese Forderung befindet sich im Einklang mit den Erwartungen, die man aufgrund des Gesetzes der großen Zahlen[1] haben darf, wonach die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die aus einer Stichprobe vorliegenden relativen empirischen Häufigkeiten $\frac{h_i}{n}$ für die einzelnen Intervalle, in die der Definitionsbereich der betrachteten Zufallsvariable aufgeteilt ist, um mehr als eine beliebig kleine Zahl $\varepsilon > 0$ von den tatsächlichen theoretischen Wahrscheinlichkeiten τ_i abweichen, umso geringer wird, je größer der Stichprobenumfang ist.

---

1) Vgl. z.B. [23], S. 136

Wenn wir nun jedoch versuchen, eine empirisch ermittelte, gruppierte Häufigkeitsverteilung mit großem Stichprobenumfang durch eine PEARSON-Verteilung im Sinne von (5.1 - 4a) ausreichend gut zu approximieren, so sollten wir folgendes bedenken :

(i) Selbst wenn die Kurvenform einer betrachteten Häufigkeitsverteilung darauf schließen läßt, daß eine im Sinne von (5.1-4a) akzeptable Approximationsfunktion aus dem PEARSON-System existieren müßte, ist es möglich, daß die unbekannte theoretische Verteilung nicht dem PEARSON-System angehört und daß der Stichprobenumfang - bei vernachlässigbaren Zufallsschwankungen bei den Besetzungszahlen der einzelnen Intervalle - so groß ist, daß die Unterschiede zwischen den relativen empirischen Häufigkeiten und den Wahrscheinlichkeiten selbst der am besten angepaßten PEARSON-Funktion nicht so klein ausfallen, daß (5.1-4a) noch erfüllt ist. Das gilt auch für theoretische Verteilungen, die sich, wie z.B. E.S. PEARSON und HARTLEY in [12] , II, S.75ff zeigen, recht gut durch PEARSON-Verteilungen approximieren lassen.

(ii) Bei empirisch ermittelten Häufigkeitsverteilungen ist oft damit zu rechnen, daß die Grundgesamtheit, aus der die Stichprobe entnommen wurde, recht heterogen ist. Das bedeutet, daß die Verteilung einer solchen Grundgesamtheit nicht mehr einem "einfachen" Verteilungsgesetz gehorcht, sondern bestenfalls durch eine Überlagerung mehrerer "einfacher" Verteilungen darzustellen ist. Hat man einer solchen Grundgesamtheit eine Stichprobe mit einem nicht allzu großen Stichprobenumfang entnommen,

so ist es oft noch möglich, eine solche Häufigkeitsverteilung durch eine "einfache" Verteilung hinreichend gut zu approximieren, wobei die systematischen und die zufälligen Abweichungen zwischen den empirischen und den theoretischen Häufigkeiten insgesamt bei einer Beurteilung anhand von (5.1-4a) als noch zulässige Zufallsabweichungen interpretiert werden können [1], was bei einem höheren Stichprobenumfang jedoch nicht mehr möglich ist.

(iii) Sehr oft besitzt die vorgegebene empirische Häufigkeitsverteilung nur relativ wenige Klassen, und oft ist die jeweilige Klasseneinteilung nicht gerade optimal [2] vorgenommen worden. Diese Gegebenheiten erschweren oder verhindern in vielen Fällen - selbstverständlich auch bei kleineren Stichproben - die richtige Auswahl einer geeigneten theoretischen Verteilung und zusätzlich ein gutes Schätzen der Parameterwerte einer solchen Verteilung, gleichgültig welche Schätzmethode man dazu anwendet. Dabei darf nochmals daran erinnert werden, daß wir in dieser Untersuchung jeweils von bereits gruppierten empirischen Verteilungen ausgehen und somit auf die jeweilige Gruppierung keinen Einfluß nehmen.

---

1) hierzu vgl. auch [1], S.168ff

2) vgl. z.B. [16], S.513, [31], I, S.8ff und [32]

Da wir uns in dieser Untersuchung speziell mit Approximationsmöglichkeiten durch PEARSON-Funktionen befassen, ist zu den Punkten (i) und (ii) anzumerken, daß bestenfalls noch im Falle von (ii) vielleicht der Versuch unternommen werden kann, eine akzeptable, aus einzelnen PEARSON-Funktionen zusammengesetzte theoretische Verteilung zu finden - und zwar dann, wenn zusätzliche Informationen über die Stichprobe vorliegen, diese dadurch in mehrere Teilstichproben aufgesplittet werden kann und zu diesen einzelnen Häufigkeitsverteilungen dann geeignete PEARSON-Funktionen gefunden werden können, die versehen mit Gewichtungsfaktoren gemäß dem Verhältnis der einzelnen Teilstichprobenumfänge zu addieren sind. Ein Beispiel, das in diese Richtung zielt, findet man in [5.2-B27] .

Zu Punkt (iii) ist festzustellen, daß wir bereits bei unseren Simulationsberechnungen in 4.2 sehen konnten, daß mit Hilfe der modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode i.a. zwar (deutlich) bessere Approximationsfunktionen gefunden werden können als mit Hilfe der (einfachen) Momentenmethode,daß diese Approximationsfunktionen andererseits jedoch keineswegs als optimal bezeichnet werden können. In 4.2 war ein Vergleich der Schätzwerte für die ersten vier Momente, die zu einer vorgegebenen "empirischen Häufigkeitsverteilung" ermittelt wurden, mit den jeweiligen tatsächlichen Momentenwerten möglich. Während dabei die Schätzwerte für den Mittelwert und die Standardabweichung noch recht gut waren, wichen die Schätzwerte für das 3. und das 4. standardisierte Moment doch bereits recht deutlich von den tatsächlichen Werten ab.

Daß diese Abweichungen auch mit Hilfe der modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode nicht weiter vermindert werden konnten - man beachte, daß keine Aussicht mehr bestand, mit Hilfe dieser Methode noch weitere entscheidende Verbesserungen zu erzielen, da (4.1-18a, b) bzw. (5.1-4a- b) bereits erfüllt war - lag im Falle unserer Simulationsberechnungen in 4.2 an der kleinen Zahl - sechs bzw. sieben - von Intervallen unserer jeweils vorgegebenen "empirischen Häufigkeitsverteilung " $\mathcal{G}$ und vielleicht noch an der eventuell zu klein gewählten Zahl von Intervallen für unsere im Zusammenhang mit der Anwendung der modifizierten Momentenmethode wichtigen Zerlegung $\mathcal{F}$ gem. (4.1-13).

- B14 - Zu der zuletzt genannten Erklärungsmöglichkeit ist festzustellen, daß sich die Momentenschätzungen nicht beliebig mit Hilfe einer Erhöhung der Zahl der Intervalle von $\mathcal{F}$ verbessern lassen. Das läßt sich unmittelbar anhand von Beispiel [5.2-B 14] nachvollziehen, wo trotz der dreifachen Anzahl von Intervallen von $\mathcal{F}$ zu der von uns in [5.2-B 12] betrachteten Körpergrößenverteilung IV in den einzelnen Schritten mit den in [5.2-B 12] erhaltenen Funktionen praktisch identische Approximationsfunktionen ermittelt wurden. Die durch (5.1-2) festgelegte Zahl von Intervallen der Zerlegung $\mathcal{F}$ dürfte sich, wie die Ergebnisse weiterer Testrechnungen, die wir hier allerdings nicht angeben, gezeigt haben, i.a. als ausreichend groß erweisen. Bei unseren Simulationsberechnungen hätte sich die Approximationsgüte in einigen Fällen noch weiter steigern lassen, doch wäre man irgendwann dennoch wie [5.2-B14] zeigt und auch einige in diesem Rahmen durchgeführte Testrechnungen zeigten, sehr bald zu einer Grenze gekommen, ab der sich - bei gleicher Zahl von Intervallen der Zerlegung $\mathcal{G}$ - keine weiteren Verbesserungen mehr ergeben hätten.

Daß die geringe Zahl von Intervallen unserer Zerlegung $\mathfrak{Z}$ in 4.2 der Hauptgrund für die Abweichungen zwischen Schätzwerten und tatsächlichen Werten für die einzelnen Momente ist, ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß die einzelnen PEARSON-Funktionen recht gut numerisch integrierbar sind und bei unserem Ansatz für unsere Simulationsberechnungen in 4.2 keinerlei Zufallsschwankungen bei den Besetzungzahlen für die einzelnen Intervalle erzeugt wurden.

Bei vorgegebenen, empirisch ermittelten Häufigkeitsverteilungen, von denen wir in diesem Kapitel ausgehen, hängt somit eine gute Schätzung der Momente wohl auch sehr von der Klassenzahl der jeweils betrachteten Verteilung ab. In diesem Fall ist jedoch bei einer großen Zahl von Klassen anderseits auch verstärkt mit dem Vorhandensein von Zufallschwankungen bei den Besetzungszahlen der einzelnen Intervalle zu rechnen, was sich dann seinerseits negativ auf die Schätzungen bemerkbar macht.

In (iii) haben wir ferner darauf hingewiesen, daß auch die Art der Klasseneinteilung die Güte der Schätzungen der Momente und damit die Ermittlung einer geeigneten Approximationsfunktion entscheidend beeinflussen kann. Hierzu ist im Hinblick auf unser Abstandsmaß $X^2_{(k)}(\mathfrak{Z})$ gem. (4.1-16) zu sagen, daß eine Einteilung des Definitionsbereichs der betrachteten Zufallsvariable in Klassen mit einigermaßen gleichen Häufigkeitsanteilen empfohlen wird[1]. Liegt bei einer vorgegebenen empirischen Verteilung eine andere Klasseneinteilung vor, so ist festzustellen, daß sehr oft, wie auch die bisher von uns betrachteten Anwendungsbeispiele zeigen,

---

1) vgl. [16] , S.511 und 513

der Wert von $\chi^2_{(k)}(\vartheta)$ gem. (4.1-16) durch den Beitrag solcher Intervalle ganz besonders erhöht wird, wo nur eine geringe empirische Häufigkeit vorliegt und zudem die zuzuordnende theoretische Häufigkeit unterschätzt wird (vgl. Formel (4.1-16)).

-B15,...,B18- Auf den Einfluß der Klasseneinteilung einer vorgegebenen Häufigkeitsverteilung auf die Ermittlung einer geeigneten Approximationsfunktion - aus dem PEARSON-System - wollen wir als nächstes eingehen.

Dazu betrachten wir die Verteilung männlicher Arbeiter aus der gesamten Industrie der BRD nach der Höhe ihres Bruttostundenverdienstes (in DM) im Jahre 1966 anhand von zwei verschiedenen Klasseneinteilungen, wie sie in [27] ,3, S.40f und S.122*f angegeben sind.

Da bei beiden Klasseneinteilungen a.a.O. weder der linke noch der rechte Randpunkt des Definitionsbereiches der betrachteten Zufallsvariable (Höhe des Bruttostundenlohns in DM) angegeben sind, wurden von uns für den linken Randpunkt x_0 der Wert 0 und für den rechten Randpunkt x_s der Wert 9 angesetzt, was in Anbetracht der vorgegebenen Häufigkeiten auf den jeweiligen Randintervallen wohl als eine plausible Annahme bezeichnet werden darf. Hierzu sei noch einmal daran erinnert, daß das für unsere Berechnungen benutzte EDV-Programm eine Annahme über die Werte der jeweiligen Randpunkte erfordert, falls diese nicht explizit angegeben sind (vgl. 5.1 und evtl. auch Beispiele [5.2-B1] und [5.2-B2]).

- B15 - In [5.2-B15] liegt uns eine Klasseneinteilung der angegeben Verteilung mit nur 7 Intervallen vor (Zerlegung $\mathfrak{Z}_{G1}$). Mit Hilfe unserer modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode gelingt es uns zwar, zu deutlich besseren Approximationsfunktionen zu finden, als es im 1. Schritt mit Hilfe der (einfachen) Momentenmethode der Fall ist, doch kann keine Approximationsfunktion gefunden werden, für die unser Abstandsmaß $X^2_{(k)}(\mathfrak{Z})$ gem (4.1-16) unser Gütekriterium (5.1-4a) erfüllt. Bei einem Richtwert von 3,84 für $\chi^2(\alpha=0,05;1\ \text{FG})$ ergibt sich für $X^2_{(k)}(\mathfrak{Z})$ im 1. Schritt ein Wert von 30,50. Im 3. und besten Schritt ergibt sich ein

Wert von 12,10. Anschließend verschlechtert sich der Wert von $X^2_{(k)}$ (ϑ) von Schritt zu Schritt wieder etwas, und die Berechnung wird nach dem 7. Schritt ($X^2_{(7)}$ (ϑ) = 12,23) abgebrochen, weil (5.1 - 4b) erfüllt ist und somit kaum noch Aussicht besteht, eine im Sinne von (5.1 - 4a) akzeptable Approximationsfunktion zu finden.

Bei der Berechnung der Werte für $X^2_{(k)}$ (ϑ) wurden jeweils die beiden ersten Intervalle der betrachteten Zerlegung ϑ_{G1} zusammengefaßt.

- B16 - Betrachten wir nun die vorgegebene empirische Verteilung auf der feineren Klasseneinteilung ϑ_F mit nunmehr 27 Klassen (vgl. Beispiel [5.2 - B16]), so stellen wir fest, daß für die im 1. Schritt unserer Approximationsversuche ermittelte PEARSON-Funktion (5.1 - 4a) wegen $X^2_{(1)}$ (ϑ) = 30,81 und $\chi^2(\alpha = 0{,}05;\ 15\ \text{F.G.})$ noch nicht erfüllt ist, daß jedoch bereits im 2. Schritt eine Funktion gefunden werden kann, für die wegen $X^2_{(2)}$ (ϑ) = 12,14 unser Gütekriterium (5.1 - 4a) erfüllt ist. Bei den in den nachfolgenden Schritten gefundenen Funktionen verschlechtert sich der Wert von $X^2_{(k)}$ (ϑ) wieder leicht.

Nach dem 8. Schritt wird die Berechnung wegen zusätzlicher Erfüllung von (5.1 - 4b) abgebrochen - bei einem Wert von 14,70 für $X^2_{(8)}$ (ϑ) bei nunmehr 16 Freiheitsgraden; hierzu ist anzumerken, daß dieser Wert lediglich gleich 12,64 wäre, wenn man ihn auf der gleichen Intervallzerlegung wie im 1. und im 2. Schritt berechnet hätte (vgl. hierzu auch (5.1 - 4)).

- B17,B18 - Vergleicht man nun die betrachtete Häufigkeitsverteilung mit Zerlegung $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}_1}$ mit der PEARSON-Funktion, die für die gleiche Verteilung anhand der Zerlegung $\mathfrak{Z}_F$ in [5.2 - B16] im 2. Schritt ermittelt wurde, so erhalten wir für unser Abstandsmaß $X_0^2(\mathfrak{Z})$ einen Wert von 9,80, der zwar besser ist als die Werte aus [5.2-B15], jedoch ebenfalls unserem Gütekriterium (5.1 - 4a) nicht gerecht wird (vgl. [5.2 - B17]). Umgekehrt (vgl. [5.2 - B18]) erhält man bei einem Vergleich der betrachteten empirischen Verteilung mit Zerlegung $\mathfrak{Z}_F$ mit der PEARSON-Funktion aus [5.2 - B15], Schritt 3 für $X_0^2(\mathfrak{Z})$ einen Wert von 15,32, der höher ist als der auf der gleichen Intervallzerlegung berechnete Wert von $X^2_{(2)}(\mathfrak{Z})$ (= 12,14) aus [5.2 - B16]. Die Ergebnisse von [5.2 - B15, ... 18] lassen sich dahingehend deuten, daß die Zerlegung $\mathfrak{Z}_F$ zwar günstiger als die Zerlegung $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}_1}$ zur Ermittlung einer geeigneten PEARSON-Funktion ist, daß jedoch auch die mit dieser Zerlegung ermittelten Funktionen bei weitem nicht als optimal zu bezeichnen sind.

Nun könnte man versuchen, von der Zerlegung $\mathfrak{Z}_F$ zu einer gröberen Zerlegung überzugehen in der Hoffnung, mit Hilfe dieser neuen Zerlegung zu besseren Schätzungen zu gelangen, die dann allerdings anhand der eigentlich vorgegebenen Zerlegung $\mathfrak{Z}_F$ zu beurteilen wären. Dabei hat man dann die Qual der Wahl, welche Intervalle von $\mathfrak{Z}_F$ man zusammenfassen soll, wobei man sich dessen bewußt sein sollte, daß bereits die vorgegebene Verteilung mit Zerlegung $\mathfrak{Z}_F$ rein optisch (vgl. Zeichnungen zu [5.2 - B16]) den Anschein erweckt, als müsse bereits auf der Zerlegung $\mathfrak{Z}_F$ eigentlich eine recht gute Approximationsfunktion gefunden werden.

- B19,B20 - Von uns durchgeführte Testrechnungen - allerdings mit anderen Verteilungen - haben gezeigt, daß oben vorgeschlagene Vorgehensweise recht unergiebig ist. Statt dessen wollen wir auf einen vielversprechenderen Weg,

zu noch besseren Approximationsfunktionen zu gelangen, verweisen und uns dabei dem Einfluß der Randintervalle einer empirischen Verteilung auf die Güte der Schätzungen zuwenden.

Man kann sich leicht klar machen, daß die Werte für die höheren Momente einer theoretischen Verteilung sehr von den Gegebenheiten auf den Randintervallen beeinflußt werden. So gilt z.B. für die Normalverteilung, daß

(5.2 - 3)
$$\int_{|x|>1{,}96} x^4 \quad f(x) \quad dx \approx 0{,}82 \cdot \mu_4$$

(nach MISHRA in [2], S. 23).

Entsprechend (mehr) werden die Schätzwerte für die Momente einer theoretischen Verteilung aus einer empirischen Verteilung von den Verhältnis auf deren Randintervallen beeinflußt. Insbesondere ist es für die Güte der Schätzwerte sehr entscheidend, welchen Wert die Randpunkte des Definitionsbereiches der empirischen Verteilung aufweisen. Sind diese Randpunkte vorgegeben, so kann es sein, daß das Randintervall zu groß gewählt wurde, so daß der Kurvenlauf der theoretischen Verteilung anhand der vorgegebenen Stichprobe nicht mehr nachzuvollziehen ist und Schätzungen anhand der (einfachen) Momentenmethode sehr schlecht ausfallen. Vergleicht man die Ergebnisse unserer bisherigen Beispiele, so stellt man fest, daß beim Vorgehen nach unserer modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode i.a. von Schritt zu Schritt die Tendenz besteht, daß die vorgegebene Häufigkeitsmasse nach dem Mittelwert hin "zusammengezogen" wird. Dabei kann es in einigen Fällen auch vorkommen, daß dieses "Zusammenziehen" zu weit geht und dadurch, nachdem zunächst von Schritt zu Schritt bessere Approximationsfunktionen gefunden wurden, sich irgendwann die

Schätzungen wieder verschlechtern, bis dann schließlich einmal (5.1 - 4b) erfüllt ist. Diese Verschlechterung hat für uns jedoch lediglich die Konsequenz, daß sich die Rechenzeiten erhöhen, was natürlich durch entsprechende Stopanweisungen in unserem EDV-Programm verhindert werden kann.

Daß diese Verschlechterungen auftreten können, ist auf eine schlechte Klassenaufteilung in den Randbereichen der empirischen Verteilung zurückzuführen. Sind die Randpunkte der empirischen Verteilung nicht explizit angegeben, so müssen von uns Werte für diese Punkte angesetzt werden (vgl. 5.1). Dann kann es selbstverständlich auch geschehen, daß von uns der Definitionsbereich der empirischen Verteilung zu stark eingeengt wird, so daß sich dann schon allein wegen dieses Ansatzes keine (besonders) guten Schätzungen mehr ergeben können.

Dieser Sachverhalt läßt sich recht gut in den nun folgenden Beispielen [5.2 - B19,20] im Zusammenhang mit den Beispielen [5.2 - B15,..,18] aufzeigen.

- B19 - In [5.2 - B19] betrachten wir die Bruttostundenlöhneverteilung praktisch auf der gleichen Intervallzerlegung wie in [5.2 - B15]; der Unterschied zu dort besteht darin, daß wir für den rechten Randpunkt x_7 statt dem Wert 9 nunmehr den Wert 50 angesetzt haben und daß wir für den linken Randpunkt x_0 statt dem Wert 0 den Wert -30 angesetzt haben. Der letzte Ansatz ist dabei sachlich nicht gerechtfertigt, da wir Bruttostundenlöhne betrachten, für die in der Stichprobe selbstverständlich nur positive Werte vorliegen können; der Ansatz erweist sich jedoch als recht nützlich.

Zu beiden angesetzten Werten ist zu sagen, daß diese von uns in diesem Beispiel bewußt recht extrem gewählt wurden, um den oben angesprochenen Sachverhalt gut zu verdeutlichen.

Aufgrund der angesetzten Werte ergeben sich in den ersten Approximationsschritten völlig unmögliche "Approximationsfunktionen" (vgl. [5.2 - B19] und zugehörige Zeichnungen).

Gestartet wird aufgrund der Schätzungen nach der (einfachen) Momentenmethode im 1. Schritt mit einer Approximationsfunktion vom Typ I(U), was darauf zurückzuführen ist, daß die Häufigkeit h_7 (= 58) bei der Schätzung der Momente dem Punkt x = 21,75 zugeordnet wird.

Bereits im 7. Schritt ergibt sich dann jedoch schon eine Approximationsfunktion für die (5.1 - 4a) erfüllt ist - bei einem Wert für $X^2_{(7)}$ ($\hat{q}$) von 3,27 und einem Richtwert $\chi^2(\alpha = 0{,}05;\ 1\ F.G.)$ von 3,84. Für die im 11. Schritt ermittelte Funktion ergibt sich $X^2_{(11)}$ ($\hat{q}$) = 2,42; nach dem 12. Schritt konnte unsere Berechnung wegen zusätzlicher Erfüllung von (5.1 - 4b) bei einem leicht schlechteren Wert für $X^2_{(12)}$ ($\hat{q}$) von 2,43 abgebrochen werden.

Anhand dieses Beispiels dürfen wir auf unsere Erfahrungen in ähnlichen Fällen verweisen und für die praktische Anwendung die oben beschriebene Vorgehensweise empfehlen, selbst dann wenn eventuell die Randpunkte einer empirischen Verteilung explizit angegeben sind.

Zu letzterem ist nämlich anhand von Beispiel [5.2 - B19] zu berichten, daß auf dem Intervall von $-\infty$ bis 0 bei der im 11. Schritt ermittelten PEARSON-Funktion vom Haupttyp II lediglich eine theoretische Wahrscheinlichkeit von ca. $1{,}20_{10}$-11 vorliegt. Zudem ist darauf hinzuweisen, daß auch in [5.2 - B15] jeweils PEARSON-Funktionen vom Haupttyp II ermittelt wurden, bei denen dem Intervall $(-\infty, 0)$ ebenfalls Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden, die größer Null sind.

- B20 - Zum Abschluß dieser Beispielsgruppe wollen wir nun noch die im 11. Schritt von [5.2 - B19] zur Zerlegung $\mathcal{Z}_{G2}$ mit unserer empirischen Verteilung auf der Zerlegung $\mathcal{Z}_F$ in Verbindung bringen. Wie das Ergebnis von [5.2 - B20] zeigt, ist die gefundene PEARSON-Funktion der empirischen Verteilung auch auf der Zerlegung $\mathcal{Z}_F$ deutlich besser angepaßt, als es bei den Funktionen aus [5.2 - B16] der Fall war ($X_0^2(\mathcal{Z}) = 3{,}38$).

-B21,...,B24- Bei der eben geschilderten Vorgehensweise, für die Randpunkte ziemlich extreme - und eventuell auch unplausible - Werte anzusetzen, kann es auch einmal - nach unseren Erfahrungen allerdings recht selten - passieren, daß man lediglich in einem einzigen Schritt oder nur in einigen wenigen Schritten einigermaßen passable Approximationsfunktionen findet, bevor sich die Approximationsgüte der in den nachfolgenden Schritten gefundenen Funktionen wieder verschlechtert, was, wie bereits erwähnt, auf eine schlechte Klasseneinteilung bei der empirischen Verteilung zurückzuführen sein dürfte.

In einem solchen Fall interessiert man sich dann vielleicht dafür, ausgehend von (einer) dieser einigermaßen passablen Approximationsfunktion(en), nach noch besseren Approximationsfunktionen zu suchen. Da man weiß, daß die PEARSON-Funktionen eindeutig durch die Werte der ersten vier Momente bestimmt sind, empfiehlt sich dann folgende (weitere) Vorgehensweise:

Wir haben bereits anhand der Beispiele zu unseren Körpergrößenverteilungen darauf hingewiesen, daß zu einer vorgegebenen empirischen Häufigkeitsverteilung - mit entsprechender Kurvenform und nicht übergroßem Stichprobenumfang - i.a. immer eine ganze Menge von bzgl. (5.1 - 4a) akzeptablen PEARSON-Funktionen existiert.

Hat man bereits eine im Sinne von (5.1 - 4a) passable PEARSON-Funktion gefunden, so kann man nun in dem durch die Momente aufgespannten Raum in der Umgebung des durch diese PEARSON-Funktion definierten Punktes andere Punkte auswählen, die ihrerseits jeweils eine PEARSON-Funktion definieren, und für diese Funktionen die zugehörigen X_o^2 (α)-Werten bestimmen. Findet man einen Punkt im Momentenraum, der zu einem besseren X_o^2 (α)-Wert führt, so kann man diesen neuen Punkt als Ausgangspunkt für dieses "Umgebungsabsuchen" betrachten, u.s.w.

- B21 - Um die vorgeschlagene Vorgehensweise anhand eines Beispiels aufzuzeigen, betrachten wir zunächst in [5.2 - B21] die Verteilung männlicher Arbeiter aus der gesamten Industrie der BRD nach der Höhe ihres Bruttostundenlohnes (in DM) - diesmal aus dem Jahre 1972 (vgl. 28 , 6A, S. 72 f).

Zu dieser Verteilung finden wir beim Vorgehen nach der modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode bei eventuell - wie in [5.2 - B15] - wieder schlecht angesetzten Werten für die Randpunkte im 4. Schritt als beste Approximationsfunktion eine PEARSON-Funktion vom Haupttyp II, für die wegen $X^2_{(4)}$ (α) = 24,00 und χ^2 (α = 0,05; 15 F.G.) = 25,00 unsere Güteabfrage (5.1 - 4a) gerade noch bejaht wird.

- B22 - Ausgehend von den Momentenwerten dieser Funktion versuchen wir in [5.2 - B22], zu einer noch besseren Approximationsfunktion für die vorgegebene empirische Verteilung zu gelangen.

Da wir von unseren Simulationsberechnungen her vermuten, daß auch bei empirischen Verteilungen durch unsere modifizierte, mehrstufige Momentenmethode recht gute Schätzungen für das 1. Moment und auch für das 2. Moment erzielt werden können, halten wir diese Werte

fest und beschränken unser "Umgebungsabsuchen" nur auf das 3. und 4. standardisierte Moment. Wie in 5.1 Formel (5.1 - 8) bereits beschrieben, betrachten wir zunächst acht Punkte auf der Ellipse um den Punkt $(\hat{\beta}_1^{(4)}, \hat{\beta}_2^{(4)})$, der durch die in [5.2 - B21], Schritt 4 gefundene Funktion eindeutig bestimmt ist und den wir in diesem Zusammenhang mit $(\beta_1^{(1,0)}, \beta_2^{(1,0)})$ bezeichnen (vgl. [5.2 - B22]).

Bei drei der acht betrachteten Punkte auf der angegebenen Ellipse um $(\beta_1^{(1,0)}, \beta_2^{(1,0)})$ stellen wir bessere $X^2_{(1,j)}$ (φ)-Werte fest; am besten ist der Wert von $P_{1,1}$ (= 15,78). Dieser Wert wird nun neuer Ausgangspunkt unseres "Umgebungsabsuchens", u.s.w.

In diesem Beispiel sieht man sehr schön, wie man von Hauptschritt zu Hauptschritt zu immer besseren $X^2_{(1,0)}$ (φ)-Werten kommt, bis sich schließlich im 18. Hauptschritt die Werte für $X^2_{(1,j)}$ (φ) im Ellipsenmittelpunkt und auf der Ellipse kaum noch unterscheiden.

Wie in [5.2 - B19] konnte auch hier noch zu einer deutlich besseren Approximationsfunktion gefunden werden, doch war bei dieser neuen Vorgehensweise ein weitaus größerer Rechenaufwand erforderlich, weshalb diese Vorgehensweise erst nach anderen Approximationsversuchen gewählt werden sollte.

In [5.2 - B22] war das Ergebnis unseres "Umgebungsabsuchens" sehr zufriedenstellend; das lag jedoch daran, daß offensichtlich in [5.2 - B21] die Randpunkte für die empirische Verteilung schlecht angesetzt wurden und bei der empirischen Verteilung eventuell auch eine schlechte Klasseneinteilung vorliegt.

Da wir für unsere Körpergrößenverteilung IV aus [5.2 - B12] auch in [5.2 - B14] keine zufriedenstellende Ap-

proximationsfunktion finden konnten, wollen wir auch zu dieser empirischen Verteilung mit Hilfe unseres "Umgebungsabsuch"-Verfahrens nach besseren Approximationsfunktionen Ausschau halten.

- B23 - In [5.2 - B12] war (5.1 - 4b) nach dem 9. Schritt erfüllt, ohne daß es gelang, (5.1 - 4a) zu erfüllen. In 5.1 haben wir bei der Programmbeschreibung erwähnt, daß in einem solchen Fall durch unser EDV-Programm gem. (5.1 - 6) ein neuer Startversuch gemacht wird, indem die Momentenwerte des letzten Schrittes nach der modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode willkürlich in der in 5.1 anhand von (5.1-6,7) beschriebenen Weise verändert werden. In [5.2 - B23] sind die diesbezüglichen Ergebnisse für diesen neuen Startversuch angegeben. Wie man sehen kann, gelingt es durch das beschriebene Verändern der Momentenwerte tatsächlich zu einer besseren Approximationsfunktion zu gelangen. In den darauf folgenden Schritten mit Hilfe der modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode verschlechtern sich die $X^2_{(k)}$ (φ)-Werte jedoch wieder und pendeln sich, wenn die Rechnung nach dem 7. Schritt (in [5.2 - B23] als "106." Schritt bezeichnet) wieder auf einen Wert ein, wie er auch in [5.2 - B12], Schritt 9 in etwa vorlag, was ein weiteres Indiz dafür ist, daß die Erfolge oder Mißerfolge mit der modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode wohl doch sehr von der vorgegebenen Klasseneinteilung abhängen.

- B24 - Als Startfunktion für unser "Umgebungsabsuch"-Verfahren diente in [5.2 - B24] die Startfunktion von [5.2 - B23]. Im Gegensatz zu [5.2 - B22] gelingt es hier erst im 4. Hauptschritt zu einer besseren Approximationsfunktion zu gelangen.

Die $X^2_{(1,j)}$ (φ)-Werte werden dann zwar noch besser, doch erhalten wir im 15. Hauptschritt, nachdem wir die Berechnung abgebrochen haben, mit 60,3 immer noch einen

Wert, der unserem Gütekriterium (5.1 - 4a) bei weitem noch nicht gerecht wird. Dabei ist anzumerken, daß im 15. Hauptschritt der größte der beiden Ellipsenradien einen Wert von 0,004 aufweist, so daß sich unser "Umgebungsabsuchen" bereits auf einen sehr kleinen Bereich in der (β_1, β_2)-Ebene beschränkt, so daß wir anhand des Wertes von $\chi^2_{(15,1)}$ ($\gg$) die Vermutung äußern können, daß wahrscheinlich zu unserer Körpergrößenverteilung keine im Sinne von (5.1 - 4a) akzeptable Approximationsfunktion aus dem PEARSON-System existiert.

Zu dieser Vermutung ist allerdings zu bemerken, daß es auch sein könnte, daß wir mit unserem "Umgebungsabsuch"-Verfahren vielleicht auch zu einem Nebenoptimum bzgl. des Wertes unseres Abstandsmaßes gelangt sein könnten.

Alles in allem dürfte sich dieses "Umgebungsabsuch"-Verfahren jedoch recht gut dazu eignen, die Approximationsgüte einer ermittelten PEARSON-Funktion zu einer vorgegebenen empirischen Verteilung einigermaßen objektiv bzgl. ihrer Optimalität zu beurteilen, wobei allerdings neben obiger Einschränkung auch noch darauf hinzuweisen ist, daß hier nur PEARSON-Funktionen als Approximationsfunktionen in Frage kommen, die eine doch recht einfache Kurvenform besitzen.

B25,B26,B27- Als nächstes wollen wir noch auf eine weitere, allerdings nur in gewissen Fällen bestehende Möglichkeit hinweisen, eine vorgegebene empirische Verteilung möglichst gut durch eine theoretische Verteilung, die dem PEARSON-System angehört, zu approximieren. Mit dieser Möglichkeit verlassen wir jedoch bereits fast den bisher betrachteten Bereich der PEARSON-Funktionen.

In unserem Kommentar zu [5.2 - B12] haben wir bereits darauf hingewiesen, daß eine vorgegebene Stichprobe recht heterogen sein kann, d.h. daß sie im Grunde genommen aus Teilstichproben zusammengesetzt ist, die einzeln vielleicht recht gut durch "einfache" theoretische Verteilungen, wie sie im PEARSON-System vertreten sind, approximiert werden können, daß jedoch die Gesamtstichprobe nicht mehr oder nur noch relativ schlecht durch eine "einfache" theoretische Verteilung approximiert werden kann. Liegen einem zu einer solchen Stichprobe dann auch die einzelnen Teilstichproben vor, so kann man versuchen, diese (möglichst gut) durch "einfache" Verteilungen - in unserem Fall aus dem PEARSON-System - zu approximieren. Anschließend hat man dann die Möglichkeit, die einzelnen "einfachen" Verteilungen gemäß dem Anteil der Teilstichprobenumfänge am Gesamtstichprobenumfang zu überlagern.

- B25 - Dazu betrachten wir zunächst in [5.2 - B25] die Verteilung von Arbeitern - und zwar von Männern und Frauen - aus dem Bereich der gesamten Industrie der BRD nach der Höhe ihres Bruttostundenverdienstes (in DM) im Jahre 1972 (Promilleverteilung). Hierzu erhalten wir im 1. Schritt unseres Approximationsversuches - mit Hilfe der (einfachen) Momentenmethode - bereits die bzgl. des Wertes von $X^2_{(k)}$ (φ) beste Approximationsfunktion ($X^2_{(1)}$ (φ) = 26,58; χ^2 (α = 0,05; 19 F.G.) = 30,14), wobei jedoch die im 4. Schritt mit Hilfe der modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode

ermittelte Funktion ($X^2_{(4)}$ (ϑ_4) = 26,74) auf dem größeren Teil des Definitionsbereiches der Häufigkeitsverteilung eine bessere Approximation aufzuweisen hat.

- B26 - Betrachtet man die Kurvenform der empirischen Verteilung, so läßt sich erkennen, daß diese Verteilung eigentlich besser durch eine zusammengesetzte theoretische Verteilung statt durch eine "einfache" PEARSON-Verteilung approximiert werden könnte. Deutlich wird das besonders dann, wenn man sich die entsprechenden Verteilungen für die Männer (vgl. [5.2 - B21]) und für die Frauen (siehe [5.2 - B26] ansieht; dabei ist als Zusatzinformation hinzuzufügen, daß der Anteil der Frauen an der Gesamtarbeiterschaft in der Industrie der BRD im Jahre 1972 gleich 24,3% war.

- B27 - Anhand der für die Männer und für die Frauen getrennt ermittelten Approximationsfunktionen (vgl. [5.2 - B21, 22,26]) läßt sich dann anhand der jeweiligen Anteile an der Gesamtstichprobe eine zusammengesetzte theoretische Verteilung definieren.

In [5.2 - B27] setzen wir die in [5.2 - B26], Schritt 3 ermittelte PEARSON-Funktion einmal mit der in [5.2 - B21], Schritt 4 ermittelten Approximationsfunktion und ein zweites Mal mit der in [5.2 - B22], Schritt 17.1 ermittelten PEARSON-Funktion zusammen und bestimmen jeweils den Wert unseres Abstandsmaßes X^2_0 (ϑ_4) zwischen der betrachteten empirischen Verteilung und der jeweiligen (zusammengesetzten) theoretischen Verteilung. Im ersten Fall erhält man für X^2_0 (ϑ_4) einen Wert von 14,22 und im zweiten Fall einen Wert von 4,85, der bei $s^* = 24$ Intervallen als sehr zufriedenstellend bezeichnet werden darf.

Die im zweiten Fall betrachtete theoretische Verteilung stammt allerdings aus einer Nachberechnung, während für unsere in [5.2 - B25] betrachtete Gesamtver-

teilung keine Nachberechnung durchgeführt wurde. Obwohl man durch eine Nachberechnung dann vielleicht zu noch (weit) besseren Approximationsfunktionen gelangen könnte, ist es jedoch offenkundig, daß in einem Fall wie oben eine zusammengesetzte theoretische Verteilung wohl immer eine bessere Approximation liefert.

Zum Schluß unserer Betrachtung von Anwendungsbeispielen wollen wir noch kurz auf die Frage von Momentenkorrekturen eingehen.

Hierzu bieten sich die bereits in 3.2.1 erwähnten Verfahren von SHEPPARD (vgl. [15], S. 361) und von PAIRMAN und PEARSON (vgl. [17]) an, wobei das zweite Verfahren das erste in sich einschließt. Verbesserungen zu dem ersten Verfahren stammen von KUPPERMAN und zu dem zweiten Verfahren von PEARSE (vgl. [18], [19]). Alle diese Verfahren setzen äquidistante Klassen bei der empirischen Verteilung voraus. Die einzelnen Verfahren beruhen auf bestimmten Annahmen über den Kurvenverlauf auf den Randintervallen.

Während die Momentenkorrekturen von SHEPPARD sehr einfach durchgeführt werden können, bekanntlich jedoch auch manchmal in die falsche Richtung verlaufen, ist bei dem KUPPERMANschen Verfahren bereits eine Entscheidung bzgl. des zu erwartenden Kurventyps zu treffen, was sich vielfach als schwierig erweisen kann. Das Verfahren von PAIRMAN und PEARSON erfordert bereits einen recht hohen Rechenaufwand, der sich noch vergrößert, wenn man die (bessere) Variante dieses Verfahrens von PEARSE anwendet.

Da wir uns beim Vorgehen nach der modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode ebenfalls am Kurvenverlauf orientieren, kommt eine Verwendung der oben genannten Verfahren zur Momentenkorrektur nur für unseren 1. Ap-

proximationsschritt in Frage, wo wir unsere Schätzungen anhand der (einfachen) Momentenmethode ermitteln.

Somit könnten wir bei Anwendung einer dieser Momentenkorrekturen oft schon von besseren Startfunktionen ausgehen. In verschiedenen hierzu von uns durchgeführten Testrechnungen hat sich jedoch gezeigt, daß sich die Zahl der Approximationsschritte, die wir benötigten, um einmal mit einer anhand unkorrigierter Momente und zum andern mit einer anhand korrigierter Momente ermittelten Startfunktion aus dem PEARSON-System zu jeweils fast gleichen Approximationsfunktionen zu gelangen, nicht sehr unterschiedlich war und daß z.B. ein geschickter Ansatz für die Werte für die Randpunkte des Definitionsbereiches der empirischen Verteilung uns sehr viel schneller zu einer guten Approximationsfunktion führte als eines dieser Momentenkorrekturverfahren.

5.3 Zusammenfassung und Ausblick

Ausgangspunkt dieser Untersuchung war unser Bestreben, vorgegebene (bereits gruppierte) empirische Verteilungen möglichst gut durch theoretische Verteilungen zu approximieren.

Hierbei beschränkten wir uns darauf, diese Approximationsversuche lediglich mit Hilfe von PEARSON-Funktionen durchzuführen, was wegen der relativ einfachen Kurvenform der PEARSON-Funktionen - unimodal, J- oder U-förmig - den Kreis der zu approximierenden empirischen Verteilungen insofern einengt, als diese in etwa auch eine solche Kurvenform haben müssen. Hierzu ist jedoch hinzuzufügen, daß das PEARSON-System die meisten gängigen theoretischen Verteilungen enthält. Zur Ermittlung der Parameterwerte der PEARSON-Funktionen aus den jeweils vorgegebenen empirischen Verteilungen verwendeten wir aus rechentechnischen Gründen die Momentenmethode.

Da wir immer von bereits gruppierten empirischen Verteilungen ausgingen und somit auf eine möglichst optimale Klasseneinteilung keinen Einfluß nehmen konnten, kam es recht oft vor, daß die Parameterschätzungen so schlecht waren, daß wir nur völlig unbefriedigende Approximationsfunktionen erhielten, obwohl anhand der Kurvenform der empirischen Verteilungen oft erwartet werden durfte, daß für sie eine geeignete Approximationsfunktion aus dem PEARSON-System existieren müßte.

Um eventuell doch noch zu besseren Approximationsfunktionen zu gelangen, wählten wir die in 3.3 dargestellte (mehrstufige) Vorgehensweise, die wir zunächst anhand von Simulationsberechnungen auf ihre Vorteile gegenüber der herkömmlichen Momentenmethode hin überprüften.

Die Ergebnisse dieser Simulationsberechnungen waren so ermutigend, daß wir uns entschließen konnten, nunmehr auch Approximationsversuche bei empirischen Verteilungen zu unternehmen. Im Unterschied zu unseren Simulationsberechnungen konnten wir bei diesen praktischen Anwendungen keinerlei Einfluß mehr nehmen auf die Art der Klasseneinteilung und den Stichprobenumfang der empirischen Verteilung. Zudem war nunmehr auch im Unterschied zu unseren Simulationsberechnungen mit mehr oder weniger großen Zufallsschwankungen bei den Besetzungszahlen der einzelnen Klassen der jeweiligen empirischen Verteilung zu rechnen, und es war auch ungewiß, ob die zugehörige theoretische Verteilung überhaupt dem PEARSON-System angehören würde.

Deshalb war der Unterschied zwischen den Ergebnissen bei Verwendung der herkömmlichen (einfachen) Momentenmethode und denen bei Verwendung der modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode nicht mehr so deutlich wie in unseren Simulationsberechnungen.

Dennoch konnten u.E. jedoch mit Hilfe unserer modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode Ergebnisse erzielt werden, die das Vorgehen nach ihr rechtfertigen.

Zu den in 5.2 dargestellten Anwendungsbeispielen ist zu sagen, daß, obwohl es unser Ziel war, die Vorteile der modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode gegenüber der (einfachen) Momentenmethode herauszustellen, wir diese Beispiele zum größten Teil nach dem Gesichtspunkt ausgewählt haben, Hinweise zu geben, weshalb auch mit Hilfe der modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode ermittelte Approximationsfunktionen oft nicht zufriedenstellend sind, und für solche Fälle Anregungen zu geben, was eventuell noch getan werden kann, um vielleicht doch noch zu besseren Approximationsfunktionen zu gelangen; hierbei erweisen sich

mittels der modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode erzielte Ergebnisse als hilfreich, um schneller zu einem solchen Ziel zu gelangen.

Haupthindernisse auf diesem Wege sind eine schlechte Klasseneinteilung und eventuell stark auftretende Zufallsschwankungen bei den Besetzungszahlen der einzelnen Klassen einer empirischen Verteilung.

Zudem ist bei Verteilungen mit großem Stichprobenumfang das PEARSON-System oft nicht mehr ausreichend, adäquate Approximationsfunktionen zu liefern.

Unsere Berechnungen bei den in 5.2 dargestellten Anwendungsbeispielen wurden mit Hilfe eines von uns entwickelten EDV-Programms durchgeführt. Bei dessen Erstellung waren gewisse Beschränkungen bzgl. des in Anspruch zu nehmenden Speicherplatzes bei der uns zur Verfügung stehenden Rechenanlage erforderlich, wodurch Ungenauigkeiten bei unseren Berechnungen auftreten konnten. So erwies sich z.B. unsere numerische Integration mit Hilfe der SIMPSON-Regel bei Funktionen der Typen I(U) und I(J) oft als nicht ausreichend genau. Hier ist geplant, für eine noch zu entwickelnde neue Version unseres "Anwendungsprogramms" mit einem anderen Verfahren zur numerischen Integration zu arbeiten.

Ebenso lassen sich auch noch andere Verbesserungen der jetzigen Version ins Auge fassen, die in Richtung einer Ausweitung des auf einer Rechenanlage jeweils vorgegebenen beschränkten Bereichs für REAL-Größen gehen.
Mit einer solchen Ausweitung des zulässigen Wertebereiches für REAL-Größen könnte u.a. die numerische Integration an den Rändern der Definitionsbereiche bei Vorhandensein von wesentlichen Singularitäten (J- bzw. U-Typen) noch weiter verbessert werden.

Mit dieser Verbesserung ließen sich jedoch auch die noch vorhandenen Schwierigkeiten bei der rechentechnischen Behandlung von solchen Funktionen weitgehend beheben, die aus den Randzonen der in Zeichnung [2.4 - Z1] ersichtlichen Gebiete der einzelnen PEARSONschen Typen stammen, was den Obergang zwischen einzelnen PEARSON-Typen in solchen Randgebieten wesentlich erleichtern würde.

Da wir uns in dieser Untersuchung bei unseren Approximationsversuchen lediglich auf PEARSON-Funktionen beschränkt haben, wodurch, wie bereits erwähnt, der Kreis der für uns für eine Approximation in Frage kommenden empirischen Verteilungen eingeengt wurde, möchten wir zum Abschluß noch darauf hinweisen, daß man bei empirischen Verteilungen, die sich nicht durch PEARSON-Funktionen approximieren lassen, eventuell dann noch die Möglichkeit hat, ausgehend von der zu dieser Verteilung ermittelten besten PEARSON-Funktion einen Approximationsversuch durch ein orthogonales Polynomsystem (vgl. 1.2) zu unternehmen, wobei dann diese ermittelte PEARSON-Funktion als Belegungsfunktion zu wählen wäre und das dazu passende System von orthogonalen Polynome zu betrachten wäre. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß dann oft auch noch Schätzungen für das 5. Moment und eventuell noch höhere Momente herangezogen werden müssen, was nach unseren Erfahrungen bzgl. der Schätzungen bereits für das 3. und 4. Moment zumindest bedenklich erscheint.

Anhang A Zusammenstellung einiger hilfreicher Formeln

A1 Formeln für Momente und Kumulanten[1)]

Beziehungen zwischen Momenten μ'_i in einem beliebigen Koordinatensystem und den zugehörigen zentralen Momenten μ_i ($i = 1, 2, \ldots$):

Es gilt für $i = 1, 2, \ldots$ - sofern die Momente existieren -

(A1 - 1a) $$\mu'_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \mu_{i-j} \mu'^{j}_1$$

und

(A1 - 1b) $$\mu_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \mu'_{i-j} (-\mu'_1)^j .$$

Speziell für $i = 1, \ldots, 4$ gilt

(A1 - 2a)
$$\mu'_2 = \mu_2 + \mu'^{2}_1$$
$$\mu'_3 = \mu_3 + 3\mu'_1\mu_2 + \mu'^{3}_1$$
$$\mu'_4 = \mu_4 + 4\mu'_1\mu_3 + 6\mu'^{2}_1 \; 2 + \mu'^{4}_1$$

und

(A1 - 2b)
$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu'^{2}_1$$
$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_1\mu'_2 + 2\mu'^{3}_1$$
$$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_1\mu'_3 + 6\mu'^{2}_1\mu'_2 - 3\mu'^{4}_1 .$$

---

1) Vgl. [3], 1, S. 67 ff

Beziehungen zwischen Momenten μ'_i und Kumulanten $\varkappa_j$:

Es gilt, sofern die Ausdrücke auf der linken und rechten Seite der folgenden Gleichung existieren,

(A1 - 3)
$$1 + \mu'_1 \frac{t}{1!} + \ldots + \mu'_r \frac{t^r}{r!} + \ldots$$

$$= \exp\left(\varkappa_1 \frac{t}{1!} + \varkappa_2 \frac{t^2}{2!} + \ldots \varkappa_r \frac{t^r}{r!} + \ldots\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1^1 t}{1!} + \frac{2^2 t^2}{2!} + \ldots\right) \cdot \left(1 + \frac{2^2 t^2}{2!} + \frac{1}{2!}\left(\frac{2^2 t^4}{2!^2}\right) + \ldots\right) \cdot$$

$$\ldots \cdot \left(1 + \left(\frac{\varkappa_r t^r}{r!}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\varkappa_r t^r}{r!}\right)^2 + \ldots\right) \cdot \ldots$$

Nach Ausmultiplizieren und Umordnung des Ausdrucks auf der rechten Seite ergibt sich speziell für die ersten sechs Momente:

$$\mu'_1 = \varkappa_1$$

$$\mu'_2 = \varkappa_2 + \varkappa_1^2$$

$$\mu'_3 = \varkappa_3 + 3\varkappa_2\varkappa_1 + \varkappa_1^3$$

$$\mu'_4 = \varkappa_4 + 4\varkappa_3\varkappa_1 + 3\varkappa_2^2 + 6\varkappa_2\varkappa_1^2 + \varkappa_1^4$$

(A1 - 4)
$$\mu'_5 = \varkappa_5 + 5\varkappa_4\varkappa_1 + 10\varkappa_3\varkappa_2 + 10\varkappa_3\varkappa_1^2$$
$$+ 15\varkappa_2^2\varkappa_1 + 10\varkappa_2\varkappa_1^3 + \varkappa_1^5$$

$$\mu'_6 = \varkappa_6 + 6\varkappa_5\varkappa_1 + 15\varkappa_4\varkappa_2 + 15\varkappa_4\varkappa_1^2 + 10\varkappa_3^2 + 60\varkappa_3\varkappa_2\varkappa_1$$
$$+ 20\varkappa_3\varkappa_1^3 + 15\varkappa_2^3 + 45\varkappa_2^2\varkappa_1^2 + 15\varkappa_2\varkappa_1^4 + \varkappa_1^6.$$

Umgekehrt erhält man aus

$$\text{(A1 - 5)} \qquad \frac{\varkappa_1 t}{1!} + \frac{\varkappa_2 t^2}{2!} + \ldots + \frac{\varkappa_r t^r}{r!} + \ldots = \log\left(1 + \frac{\mu_1' t}{1!} + \ldots + \frac{\mu_r' t^r}{r!} + \ldots\right)$$

bei entsprechenden Existenzvoraussetzungen für die ersten sechs Kumulanten:

$$\varkappa_1 = \mu_1'$$

$$\varkappa_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

$$\varkappa_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_1'^3$$

$$\varkappa_4 = \mu_4' - 4\mu_3'\mu_1' - 3\mu_2'^2 + 12\mu_2'\mu_1'^2 - 6\mu_1'^4$$

$$\text{(A1 - 6)} \qquad \varkappa_5 = \mu_5' - 5\mu_4'\mu_1' - 10\mu_3'\mu_2' + 20\mu_3'\mu_1'^2 + 30\mu_2'^2\mu_1' - 60\mu_2'\mu_1'^3 + 24\mu_1'^5$$

$$\varkappa_6 = \mu_6' - 6\mu_5'\mu_1' - 15\mu_4'\mu_2' + 30\mu_4'\mu_1'^2 - 10\mu_3'^2 + 120\mu_3'\mu_2'\mu_1' - 120\mu_3'\mu_1'^3 + 30\mu_2'^3 - 270\mu_2'^2\mu_1'^2 + 360\mu_2'\mu_1'^4 - 120\mu_1'^6.$$

A2 Die SIMPSON-Regel[1)] (KEPLERsche Faßregel)

Einfache SIMPSON-Regel:

$$\int_{x_o}^{x_o + 2h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\,(y_o + 4y_1 + y_2) \qquad \text{(A2 - 1)}$$

Aneinandergereihte SIMPSON-Regel:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\,(y_o + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) \qquad \text{(A2 - 2a)}$$

wobei

$$2k \cdot h = b - a. \qquad \text{(A2 - 2b)}$$

---

1) Vgl. 35 , S. 236 u. S. 607 f

A3 Γ- und B-Funktion[1)]

Eulersche Gammafunktion:

(A3 - 1) $$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt, \quad x > 0$$

Gaußsche Definition:

(A3 - 2) $$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}, \quad x = 0, -1, -2, \ldots$$

(A3 - 3) $$\Gamma(x) = x^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left((1 + \tfrac{1}{n})^x (1 + \tfrac{x}{n})^{-1}\right)$$

Funktionalgleichungen:

(A3 - 4) $$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

(A3 - 5) $$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

(A3 - 6) $$\Gamma(\tfrac{1}{2} + x)\,\Gamma(\tfrac{1}{2} - x) = \frac{\pi}{\cos(\pi x)}$$

(A3 - 7) $$\Gamma(x)\,\Gamma(-x) = \frac{\pi}{x \sin(\pi x)}$$

(A3 - 8) $$\Gamma(x)\,\Gamma(x+\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \cdot \Gamma(2x)$$

(A3 - 9) $$\frac{\Gamma}{\Gamma(s+1)\,\Gamma(1-s)} = \frac{\sin(\pi \cdot s)}{\pi \cdot s}$$

---

1) Vgl. 35 , S. 463

Definition der Betafunktion[1]:

(A3 - 10) $$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \, dt$$

Es gilt

(A3 - 11) $$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

---

1) Vgl. [1], S. 182

Anhang B

Ergebnisse und Zeichnungen zu den in 5.2. besprochenen Beispielen

Inhaltsverzeichnis

Beispiel	Seite
B 1	309
B 2	345
B 3	359
B 4	367
B 5	374
B 6	381
B 7	387
B 8	392
B 9	397
B 10	403
B 11	409
B 12	416
B 13	421
B 14	423
B 15	426
B 16	432
B 17	439
B 18	442
B 19	446
B 20	458
B 21	462
B 22	468
B 23	477
B 24	481
B 25	488
B 26	494
B 27	500

PROBLEMSTELLUNG

BEISPIEL AUS ELDERTON/JOHNSON S. 5 (EXAMPLE 2 OF TABLE 1), VERSION 1
EXPOSED TO RISK OF SICKNESS (URSPR. QUELLE WATSON, TABLES, S. 19)

AUSGANGSDATEN

INTERVALL	KLASSENGRENZE	HAEUFIGKEIT(ABS.)	HAEUFIGKEIT(REL.)
	0.000000000000!+000		
1	1.650000000000!+001	34	3.400000000001!-002
2	2.450000000000!+001	145	1.450000000000!-001
3	2.950000000000!+001	156	1.559999999999!-001
4	3.450000000000!+001	145	1.450000000001!-001
5	3.950000000000!+001	123	1.230000000000!-001
6	4.450000000000!+001	103	1.029999999999!-001
7	4.950000000000!+001	86	8.599999999993!-002
8	5.450000000000!+001	71	7.099999999999!-002
9	5.950000000000!+001	55	5.500000000001!-002
10	6.450000000000!+001	37	3.700000000000!-002
11	6.950000000000!+001	21	2.100000000000!-002
12	7.450000000000!+001	13	1.299999999999!-002
13	7.950000000000!+001	7	7.000000000006!-003
14	8.450000000000!+001	3	3.000000000000!-003
15	8.950000000000!+001	1	1.000000000001!-003

ES WIRD EINE KOORDINATENTRANSFORMATION VORGENOMMEN, UND ZWAR WIRD GESETZT
X-NEU = (X-ALT - (GESCHAETZTER) MITTELWERT) / (GESCHAETZTE) STANDARDABWEICHUNG.

ES WURDEN FOLGENDE WERTE GESCHAETZT.....

MITTELWERT = 3,76284999996!+001

STANDARDABWEICHUNG = 1,42680451642!+001

1-TER APPROXIMATIONSSCHRITT

MOMENTENWERTE

0. MOMENT= 1.00000000000'+000

1. MOMENT= 3.08517055867'-011

2. MOMENT= 9.99999999720'-001

3. MOMENT= 5.48017604757'-001

4. MOMENT= 2.99240756687'+000

DET(MOM)= 1.69208427181'+000

MOMENTENWERTE IM URSPRUENGLICHEN KOORDINATENSYSTEM

1. MOMENT= 3.76284999996'+001

2. MOMENT= 1.61940112500'+003

3. MOMENT= 3.82762720547'+005

4. MOMENT= 4.09786221497'+006

SOMIT ERHAELT MAN

MWERT= 3.76284999996'+001 SIGMA= 1.42680451632'+001

ZENTRALE MOMENTE

2. ZENTRALES MOMENT= 9.99999999720'-001

3. ZENTRALES MOMENT= 5.48017604666'-001

4. ZENTRALES MOMENT= 2.99240756681'+000

STANDARDISIERTE MOMENTE

3. STANDARD. MOMENT= 5.48017604895'-001

4. STANDARD. MOMENT= 2.99240756844'+000

PARAMETERWERTE....

TYP I

KAPPA = -2.65869070565'-001

BETA1= 3.00323205276'-001 BETA2= 2.99240756844'+000

A = 3.94695604133'-001 B0= -1.33033647249'+000

B1= -3.94695604166'-001 B2= 1.10112157625'-00+

X2= -2.11848353467'+000 S2= 2.00152519037'+000

X1= 5.70297059475'+000 S1= 7.08012411679'+000

YSTERN = 3.65666986812'-007

IN ALTEN KOORDINATENSYSTEM ERGEBEN SICH FOLGENDE WERTE FUER DIE PARAMETER
DER BETRACHTETEN APPROXIMATIONSFUNKTION.....

X2 = 7.40186124776'+000 S2= 2.00152519037'+000

X1 = 1.18998742016'+002 S1= 7.08012411679'+000

YSTERN= 8.41759332153'-019

NUMERISCHE INTEGRATION.....

ZAHL DER ANEINANDERFUEGUNGEN BEI ANWENDUNG DER SIMPSONREGEL = 1096
SUMME DER WAHRSCHEINLICHKEITEN = 1.00001204689'+000

DABEI..

P(/ 38/)= 4.68367302568'-011

P(/ 549/)= 5.87250477324'-004

CHI-QUADRAT-TEST.....

HYPOTHESE.. DIE VORGEGEBENE HAEUFIGKEITSVERTEILUNG LAESST SICH ALS
STICHPROBE DER ANGEGEBENEN PEARSONVERTEILUNG AUFFASSEN

BEITRAEGE DER EINZELNEN KLASSEN ZUM X-D-QUADRAT-WERT
X(/ 0/)= -2.63725686079'+000
X-0-QU(/ 1/)= 3.22659240672'+001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -5.29990983810'+001 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -5.29990983810'-002
X(/ 1/)= -1.27056648553'+000
X-0-QU(/ 2/)= 1.58651794373'+001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 4.06819862649'+001 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 4.06819862649'-002
X(/ 2/)= -9.20133055966'-001
X-0-QU(/ 3/)= 5.46872515924'+000 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 2.66015857356'+001 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 2.66015857355'-002
X(/ 3/)= -3.69699626409'-001
X-0-QU(/ 4/)= 4.14358991297'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 7.54685023613'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 7.54685023617'-003
X(/ 4/)= -2.19266196851'-001
X-0-QU(/ 5/)= 4.09244160652'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -8.08986078482'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -8.08986078482'-003
X(/ 5/)= 1.31167232710'-001
X-0-QU(/ 6/)= 1.23534401349'+000 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -1.19146606363'+001 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -1.19146606364'-002
X(/ 6/)= 4.81600662268'-001
X-0-QU(/ 7/)= 6.37109310015'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -7.72803350166'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -7.72803350174'-003
X(/ 7/)= 8.32034091025'-001
X-0-QU(/ 8/)= 4.16366633704'-003 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -5.45795585029'-001 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -5.45795585026'-004
X(/ 8/)= 1.18246752140'+000
X-0-QU(/ 9/)= 2.82821656318'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 3.80513045751'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 3.80513045751'-003
X(/ 9/)= 1.53290095093'+000

```
X-0-QU(/  10/)=  2,15378744470'-001    WOBEI  H(EMP)-H(THEOR)=  2,71730806958'+000    SOWIE  P(EMP)-P(THEUR)=  2,71730806958'-003
X(/   10/)=  1,8333343805?'+000
X-0-QU(/  11/)=  8,87307153862'-003    WOBEI  H(EMP)-H(THEOR)= -3,83365887217'-001    SOWIE  P(EMP)-P(THEUR)= -3,83365887217'-004
X(/   11/)=  2,23376781005'+000
X-0-QU(/  12/)=  3,71888216127'-002    WOBEI  H(EMP)-H(THEOR)=  6,76963231002'-001    SOWIE  P(EMP)-P(THEUR)=  6,76963231001'-004
X(/   12/)=  2,56420123963'+000
X-0-QU(/  13/)=  1,27583730309'-002    WOBEI  H(EMP)-H(THEOR)= -3,81056110491'-001    SOWIE  P(EMP)-P(THEUR)= -3,81056110484'-004
X(/   15/)=  3,63550152828'+000

ZAHL DER VORZEICHENWECHSEL=    6

STICHPROBENUMFANG =    1000
ZAHL DER KLASSEN      =  13
ZAHL DER FREIHEITSGRADE =  8


  X-0=QUADRAT=  5,69658178203'+001

CHI-QUADRAT ( 95 ) =  1,55100000000'+001

CHI-QUADRAT ( 99 ) =  2,00899999999'+001

CHI-QUADRAT (99,9) =  2,61299999999'+001

DIE HYPOTHESE WIRD ABGELEHNT.
DIE ABWEICHUNG IST AEUSSERST SIGNIFIKANT.


DABEI.....

INTERVALLGRENZEN X(I), SOWIE =WAHRSCHEINLICHKEITEN P(I) UND =HAEUFIGKEITEN H(I)
DER BETRACHTETEN APPROXIMATIONSFUNKTION,.............

X (/   0/)= -2.63725606079'+000

P1(/   1/)=  8,69990983811'-002    H(/   1/)=  8,69990983810'+001

X (/   1/)= -1.27056648553'+000

P1(/   2/)=  1.04318013735'-001    H(/   2/)=  1,04318013735'+002

X (/   2/)= -9.20133055966'-001

P1(/   3/)=  1.29398414265'-001    H(/   3/)=  1,29398414264'+002

X (/   3/)= -5.69699626409'-001

P1(/   4/)=  1.37453149764'-001    H(/   4/)=  1,37453149764'+002

X (/   4/)= -2.19266196851'-001

P1(/   5/)=  1.31089860784'-001    H(/   5/)=  1,31089860785'+002

X (/   5/)=  1.31167232710'-001

P1(/   6/)=  1.14914660637'-001    H(/   6/)=  1,14914660636'+002

X (/   6/)=  4.81600662268'-001

P1(/   7/)=  9.37280335020'-002    H(/   7/)=  9,37280335017'+001
```

X (/ 7/)= 8.32034091825'-001

P1(/ 8/)= 7.15457955848'-002 H(/ 8/)= 7.15457955850'+001

X (/ 8/)= 1.10246752140'+000

P1(/ 9/)= 5.11948695423'-002 H(/ 9/)= 5.11948695425'+001

X (/ 9/)= 1.53290095093'+000

P1(/ 10/)= 3.42826919305'-002 H(/ 10/)= 3.42826919304'+001

X (/ 10/)= 1.80333430052'+000

P1(/ 11/)= 2.13833658870'-002 H(/ 11/)= 2.13833658872'+001

X (/ 11/)= 2.23376781005'+000

P1(/ 12/)= 1.23230367690'-002 H(/ 12/)= 1.23230367690'+001

X (/ 12/)= 2.58420123963'+000

P1(/ 13/)= 6.48136921518'-003 H(/ 13/)= 6.48136921518'+000

X (/ 13/)= 2.93403466916'+000

P1(/ 14/)= 3.05545219773'-003 H(/ 14/)= 3.05545219773'+000

X (/ 14/)= 3.28506809875'+000

P1(/ 15/)= 1.25698422025'-003 H(/ 15/)= 1.25698422024'+000

X (/ 15/)= 3.63550152828'+000

ZUSAETZLICH BEIM CHI-QUADRATTEST BERUECKSICHTIGTE RANDWAHRSCHEINLICHKEITEN.....

P1(/ 16/)= 5.87250477324'-004

DA SICH IM 1. APPROXIMATIONSSCHRITT KEINE AUSREICHENDE APPROXIMATIONSGUETE ERGAB,
WIRD VERSUCHT, DIE SCHAETZUNG DER MOMENTE DER VORGEGEBENEN HAEUFIGKEITSVERTEILUNG ZU VERBESSERN.

DIES GESCHIEHT MIT HILFE DER ZERLEGUNG F, DIE SICH AUS DER VORGEGEBENEN
INTERVALLZERLEGUNG (ZERLEGUNG G) ERGIBT, INDEM DIE INTERVALLE VON G IN N(/I/)
AEQUIDISTANTE TEILINTERVALLE AUFGETEILT WERDEN.

N(/ 1/) = 100
N(/ 2/) = 32
N(/ 3/) = 32
N(/ 4/) = 32
N(/ 5/) = 32
N(/ 6/) = 32
N(/ 7/) = 32
N(/ 8/) = 32
N(/ 9/) = 32
N(/ 10/) = 32
N(/ 11/) = 32
N(/ 12/) = 32
N(/ 13/) = 32

N(/ 14/) = 32
N(/ 15/) = 32

GESAMTZAHL DER INTERVALLE VON F = 548

2-TER APPROXIMATIONSSCHRITT

MOMENTENWERTE VERAENDERUNG ZUM LETZTEN SCHRITT

0. MOMENT= 1.000000000000+000

1. MOMENT= 1.310729322591-002

2. MOMENT= 9.455104992381-001 V2= 9.455104995031-001

3. MOMENT= 6.631840701561-001 V3= 1.210151032371+000

4. MOMENT= 2.666932624131+000 V4= 8.912330839051-001
DET(MOM)= 1.252502265101+000

MOMENTENWERTE IM URSPRUENGLICHEN KOORDINATENSYSTEM

1. MOMENT= 3.781551545111+001 V1= 1.004970048031+000

2. MOMENT= 1.622462531641+003 V2= 1.001840964131+000

3. MOMENT= 3.660249234921+005 V3= 9.562710887041-001

4. MOMENT= 4.080340312501+006 V4= 9.957241357701-001

SOMIT ERHAELT MAN

MWERT= 3.781551545111+001 SIGMA= 1.387261052591+001

ZENTRALE MOMENTE

2. ZENTRALES MOMENT= 9.453386981001-001

3. ZENTRALES MOMENT= 6.260093237651-001

4. ZENTRALES MOMENT= 2.633136981981+000

STANDARDISIERTE MOMENTE

3. STANDARD. MOMENT= 6.810823832061-001

4. STANDARD. MOMENT= 2.946446636281+000

PARAMETERWERTE....

TYP I

KAPPA = -2.632342045221-001

BETA1= 4.638732127131-001 BETA2= 2.946446636281+000

A = 6.545390890561-001 B0= -1.657198602741+000

B1= -6.743085205451-001 B2= 2.541080812371-001

X2= -1,55104337120'+000 S2= 6,12962890110'-001

X1= 4,20467216277'+000 S1= 3,32237043383'+000

YSTERN = 2,33352998215'-003

IM ALTEN KOORDINATENSYSTEM ERGEBEN SICH FOLGENDE WERTE FUER DIE PARAMETER
DER BETRACHTETEN APPROXIMATIONSFUNKTION,.....

X2 = 1,54981431272'+001 S2= 6,12962890110'-001

X1 = 9,76209523184'+001 S1= 3,32237043383'+000

YSTERN= 4,68640612493'-009

NUMERISCHE INTEGRATION,.....

ZAHL DER ANEINANDERFUEGUNGEN BEI ANWENDUNG DER SIMPSONREGEL = 1096
SUMME DER WAHRSCHEINLICHKEITEN = 9,99998383588'-001

DABEI..

P(/ 80/)= 1,65409301247'-004

P(/ 549/)= 1,31267852948'-004

CHI-QUADRAT-TEST.....

HYPOTHESE,, DIE VORGEGEBENE HAEUFIGKEITSVERTEILUNG LAESST SICH ALS
STICHPROBE DER ANGEGEBENEN PEARSONVERTEILUNG AUFFASSEN

BEITRAEGE DER EINZELNEN KLASSEN ZUM X-0-QUADRAT-WERT

X(/ 0/)= -2,63725686079'+000
X-0-QU(/ 1/)= 8,96601089137'+000 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -2,24150105622'+001 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -2,24150105621'-002
X(/ 1/)= -1,27656648553'+000
X-0-QU(/ 2/)= 2,54286904977'+000 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 1,79725920279'+001 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 1,79725920280'-002
X(/ 2/)= -9,20133059961'-001
X-0-QU(/ 3/)= 8,82821741539'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 1,13023123564'+001 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 1,13023123565'-002
X(/ 3/)= -5,66609626409'-001
X-0-QU(/ 4/)= 7,17412164122'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 3,18961587921'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 3,18961587921'-003
X(/ 4/)= -2,19266196851'-001
X-0-QU(/ 5/)= 2,23145612089'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -5,35173327755'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -5,35173327762'-003
X(/ 5/)= 1,31167232710'-001
X-0-QU(/ 6/)= 4,11318307353'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -6,71780790389'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -6,71780790390'-003
X(/ 6/)= 4,81600662268'-001
X-0-QU(/ 7/)= 1,20404976635'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -3,27865744010'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -3,27865744009'-003
X(/ 7/)= 8,32034891825'-001
X-0-QU(/ 8/)= 4,52266817896'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 1,76948201656'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 1,76948201657'-003
X(/ 8/)= 1,18246752140'+000
X-0-QU(/ 9/)= 3,16103048732'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 4,01455533039'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 4,01455533029'-003
X(/ 9/)= 1,53290095093'+000

X-0-QU(/ 10/)= 7,36141532616'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 1,61397408139'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 1,61397408139'-003
X(/ 10/)= 1,81333438052'+000
X-0-QU(/ 11/)= 1,40282024264'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -1,84032882750'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -1,84032882750'-003
X(/ 11/)= 2,23376701005'+000
X-0-QU(/ 12/)= 1,29004836510'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -4,16020618053'-001 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -4,16020618047'-004
X(/ 12/)= 2,58420123963'+000
X-0-QU(/ 13/)= 2,32145420000'-003 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 1,58643513444'-001 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 1,58643513444'-004
X(/ 15/)= 3,63550152828'+000

ZAHL DER VORZEICHENWECHSEL= 5

STICHPROBENUMFANG = 1000
ZAHL DER KLASSEN = 13
ZAHL DER FREIHEITSGRADE = 8

X-0-QUADRAT= 1,37567590464'+001

CHI-QUADRAT (95) = 1,55100000000'+001

CHI-QUADRAT (99) = 2,00899999999'+001

CHI-QUADRAT (99,9) = 2,61299999999'+001

DIE HYPOTHESE WIRD ANGENOMMEN.

DABEI....

INTERVALLWAHRSCHEINLICHKEITEN P(I) UND -HAEUFIGKEITEN H(I)

P1(/ 1/)=	5,64150105618'-002	H(/ 1/)=	5,64150105622'+001
P1(/ 2/)=	1,27027407973'-001	H(/ 2/)=	1,27027407972'+002
P1(/ 3/)=	1,44697687643'-001	H(/ 3/)=	1,44697687644'+002
P1(/ 4/)=	1,41810384121'-001	H(/ 4/)=	1,41810384121'+002
P1(/ 5/)=	1,28351733278'-001	H(/ 5/)=	1,28351733278'+002
P1(/ 6/)=	1,09717807904'-001	H(/ 6/)=	1,09717807904'+002
P1(/ 7/)=	8,92786574405'-002	H(/ 7/)=	8,92786574401'+001
P1(/ 8/)=	6,92305179837'-002	H(/ 8/)=	6,92305179834'+001
P1(/ 9/)=	5,09854446698'-002	H(/ 9/)=	5,09854446696'+001
P1(/ 10/)=	3,53860259183'-002	H(/ 10/)=	3,53860259187'+001
P1(/ 11/)=	2,28403288274'-002	H(/ 11/)=	2,28403288275'+001
P1(/ 12/)=	1,34160206180'-002	H(/ 12/)=	1,34160206181'+001
P1(/ 13/)=	6,91231190152'-003	H(/ 13/)=	6,91231198155'+000
P1(/ 14/)=	2,92011793465'-003	H(/ 14/)=	2,92011793464'+000
P1(/ 15/)=	8,77658879489'-004	H(/ 15/)=	8,77658879490'-001

ZUSAETZLICH BEIM CHI-QUADRATTEST BERUECKSICHTIGTE RANDWAHRSCHEINLICHKEITEN.....

P1(/ 16/)= 1.31267852948'-004

3-TER APPROXIMATIONSSCHRITT

MOMENTENWERTE VERAENDERUNG ZUM LETZTEN SCHRITT

0. MOMENT= 1.000000000001+000

1. MOMENT= 1.651044317351-002 V1= 1.260248236531+000

2. MOMENT= 9.335285192971-001 V2= 9.873275019671-001

3. MOMENT= 6.930099772941-001 V3= 1.044973799091+000

4. MOMENT= 2.509702547481+000 V4= 9.747912354291-001

DET(MOM)= 1.153750093831+000

MOMENTENWERTE IN URSPRUENGLICHEN KOORDINATENSYSTEM

1. MOMENT= 3.706418589301+001 V1= 1.001287049561+000

2. MOMENT= 1.623686006171+003 V2= 1.000754121921+000

3. MOMENT= 3.623894029581+005 V3= 9.900678060401-001

4. MOMENT= 4.080243445311+006 V4= 9.999762600241-001

SOMIT ERHAELT MAN

MWERT= 3.786418589301+001 SIGMA= 1.378306761181+001

ZENTRALE MOMENTE

2. ZENTRALES MOMENT= 9.332556603331-001

3. ZENTRALES MOMENT= 6.467576783141-001

4. ZENTRALES MOMENT= 2.535440870171+000

STANDARDISIERTE MOMENTE

3. STANDARD. MOMENT= 7.173657608071-001

4. STANDARD. MOMENT= 2.934030141221+000

PARAMETERWERTE....

TYP I

KAPPA = -2.652350949131-001

BETA1= 5.146136347791-001 BETA2= 2.934030141221+000

A = 7.796878636071-001 BC= -1.828403412461+000

B1= -8.069252304381-001 B2= 3.244532051801-001

X2= -1,43635087472'+000 S2= 3,77613347657'-001

X1= 3,92338203220'+000 S1= 2,70449520927'+000

YSTERN = 7,70110756366'-003

IM ALTEN KOORDINATENSYSTEM ERGEBEN SICH FOLGENDE WERTE FUER DIE PARAMETER
DER BETRACHTETEN APPROXIMATIONSFUNKTION.....

X2 = 1,71345808478'+001 S2= 3,77613347657'-001

X1 = 9,36074920315'+001 S1= 2,70449520927'+000

YSTERN= 1,49306752607'-007

NUMERISCHE INTEGRATION.....

ZAHL DER ANEINANDERFUEGUNGEN BEI ANWENDUNG DER SIMPSONREGEL = 1096
SUMME DER WAHRSCHEINLICHKEITEN = 9,99997008556'-001

DABEI..

P(/ 88/)= 8,33785574663'-005

P(/ 549/)= 3,82435707724'-005

CHI-QUADRAT-TEST.....

HYPOTHESE.. DIE VORGEGEBENE HAEUFIGKEITSVERTEILUNG LAESST SICH ALS
STICHPROBE DER ANGEGEBENEN PEARSONVERTEILUNG AUFFASSEN

BEITRAEGE DER EINZELNEN KLASSEN ZUM X-O-QUADRAT-WERT

X(/ 0/)= -2,63725686079'+000
X-O-QU(/ 1/)= 1,51618286822'+000 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -7,97785044275'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -7,97785044279'-003
X(/ 1/)= -1,27056646553'+000
X-O-QU(/ 2/)= 2,79302687106'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 6,22575672530'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 6,22575672537'-003
X(/ 2/)= -5,20133555966'-001
X-O-QU(/ 3/)= 1,81234497495'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 5,22742251772'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 5,22742251769'-003
X(/ 3/)= -5,69609626409'-001
X-O-QU(/ 4/)= 3,69963221587'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 2,10457422119'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 2,10457422119'-003
X(/ 4/)= -2,19266196851'-001
X-O-QU(/ 5/)= 1,23329653852'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -3,95696327183'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -3,95696327178'-003
X(/ 5/)= 1,31167232710'-001
X-O-QU(/ 6/)= 2,04567500325'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -4,69367945287'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -4,69367945289'-003
X(/ 6/)= 4,81600662268'-001
X-O-QU(/ 7/)= 3,16634826133'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -1,66607722268'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -1,66607722268'-003
X(/ 7/)= 8,32034091825'-001
X-O-QU(/ 8/)= 9,67030202919'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 2,57238356024'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 2,57238356024'-003
X(/ 8/)= 1,18246752140'+000
X-O-QU(/ 9/)= 3,20653677271'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 4,04225057829'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 4,04225057832'-003
X(/ 9/)= 1,53290995093'+000

X-0-QU(/ 10/)= 3,61864894676'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 1,13915671781'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 1,13915671781'-003
X(/ 10/)= 1,85333438052'+000
X-0-QU(/ 11/)= 2,59904476130'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -2,46979872510'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -2,46979872510'-003
X(/ 11/)= 2,23376781005'+000
X-0-QU(/ 12/)= 5,07346681359'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -9,03674560424'-001 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -9,03674560419'-004
X(/ 12/)= 2,58420123963'+000
X-0-QU(/ 13/)= 1,21454362845'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 3,59490788018'-001 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 3,59490788014'-004
X(/ 15/)= 3,63550152028'+000

ZAHL DER VORZEICHENWECHSEL= 5

STICHPROBENUMFANG = 1000
ZAHL DER KLASSEN = 13
ZAHL DER FREIHEITSGRADE = 8

X-0-QUADRAT= 3,15160997934'+000

CHI-QUADRAT (95) = 1,55100000000'+001

CHI-QUADRAT (99) = 2,00899999999'+001

CHI-QUADRAT (99,9) = 2,61299999999'+001

DIE HYPOTHESE WIRD ANGENOMMEN.

DABEI.....

INTERVALLWAHRSCHEINLICHKEITEN P(I) UND -HAEUFIGKEITEN H(I)

P1(/ 1/)= 4,19778504424'-002 H(/ 1/)= 4,19778504428'+001
P1(/ 2/)= 1,38774243274'-001 H(/ 2/)= 1,38774243275'+002
P1(/ 3/)= 1,50772577483'-001 H(/ 3/)= 1,50772577482'+002
P1(/ 4/)= 1,42895425779'-001 H(/ 4/)= 1,42895425779'+002
P1(/ 5/)= 1,26956963271'-001 H(/ 5/)= 1,26956963272'+002
P1(/ 6/)= 1,07693679453'-001 H(/ 6/)= 1,07693679453'+002
P1(/ 7/)= 8,76660772228'-002 H(/ 7/)= 8,76660772227'+001
P1(/ 8/)= 6,84276164393'-002 H(/ 8/)= 6,84276164398'+001
P1(/ 9/)= 5,09577494213'-002 H(/ 9/)= 5,09577494217'+001
P1(/ 10/)= 3,58608432821'-002 H(/ 10/)= 3,58608432822'+001
P1(/ 11/)= 2,34697987253'-002 H(/ 11/)= 2,34697987251'+001
P1(/ 12/)= 1,39036745604'-002 H(/ 12/)= 1,39036745604'+001
P1(/ 13/)= 7,09938954083'-003 H(/ 13/)= 7,09938954085'+000
P1(/ 14/)= 2,82542851922'-003 H(/ 14/)= 2,82542851922'+000
P1(/ 15/)= 6,77447581168'-004 H(/ 15/)= 6,77447581169'-001

ZUSÄTZLICH DEIN CHI-QUADRATTEST BERÜCKSICHTIGTE RANDWAHRSCHEINLICHKEITEN.....

P1(/ 16/)= 3.82435707724'-005

4-TER APPROXIMATIONSSCHRITT

MOMENTENWERTE VERAENDERUNG ZUM LETZTEN SCHRITT

0. MOMENT= 1,000000000000'+000

1. MOMENT= 1,737196682441'-002 V1= 1,051670949961'+000

2. MOMENT= 9,305517350081'-001 V2= 9,968112551181'-001

3. MOMENT= 6,995346714071'-001 V3= 1,009415007491'+000

4. MOMENT= 2,503468845991'+000 V4= 9,937555542641'-001

DET(MOM)= 1,130750246351'+000

MOMENTENWERTE IN URSPRUENGLICHEN KOORDINATENSYSTEM

1. MOMENT= 3,787636400671'+001 V1= 1,000321626201'+000

2. MOMENT= 1,623996549341'+003 V2= 1,000191221191'+000

3. MOMENT= 3,614841085401'+005 V3= 9,975016261891'-001

4. MOMENT= 4,079870241981'+006 V4= 9,999085339551'-001

SOMIT ERHAELT MAN

MWERT= 3,787636400671'+001 SIGMA= 1,376145337421'+001

ZENTRALE MOMENTE

2. ZENTRALES MOMENT= 9,302499497751'-001

3. ZENTRALES MOMENT= 6,510486150041'-001

4. ZENTRALES MOMENT= 2,536544360981'+000

STANDARDISIERTE MOMENTE

3. STANDARD. MOMENT= 7,256278393831'-001

4. STANDARD. MOMENT= 2,931184473221'+000

PARAMETERWERTE....

TYP I

KAPPA = -2,650046211441'-001

BETA1= 5,265357612881'-001 BETA2= 2,931184473221'+000

A = 8,139274627031'-001 BO= -1,875445249431'+000

B1= -8,432478071951'-001 B2= 3,439005434671'-001

X2= -1,41152023780'+000 S2= 3,29416827914'-001

X1= 3,86353115551'+000 S1= 2,57840061816'+000

YSTERN = 9,71295558657'-003

IM ALTEN KOORDINATENSYSTEM ERGEBEN SICH FOLGENDE WERTE FUER DIE PARAMETER
DER BETRACHTETEN APPROXIMATIONSFUNKTION.....

X2 = 1,74888654966'+001 S2= 3,29416827914'-001

X1 = 9,27533370197'+001 S1= 2,57840061816'+000

YSTERN= 2,99437209483'-007

NUMERISCHE INTEGRATION.....

ZAHL DER ANEINANDERFUEGUNGEN BEI ANWENDUNG DER SIMPSONREGEL = 1096
SUMME DER WAHRSCHEINLICHKEITEN = 9,99988722615'-001

DABEI..

P(/ 90/)= 3,66728719399'-004

P(/ 549/)= 2,33940383199'-005

CHI-QUADRAT-TEST.....

HYPOTHESE.. DIE VORGEGEBENE HAEUFIGKEITSVERTEILUNG LAESST SICH ALS
STICHPROBE DER ANGEGEBENEN PEARSONVERTEILUNG AUFFASSEN

BEITRAEGE DER EINZELNEN KLASSEN ZUM X-O-QUADRAT-WERT

X(/ 0/)= -2,63725680879'+000				
X-O-QU(/ 1/)= 3,79794452809'-001	WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -3,78837917745'+000	SOWIE	P(EMP)-P(THEOR)= -3,78837917745'-003	
X(/ 1/)= -1,27056648553'+000				
X-O-QU(/ 2/)= 5,78116866634'-002	WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 2,86652683560'+000	SOWIE	P(EMP)-P(THEOR)= 2,86652683560'-003	
X(/ 2/)= -9,26133055968'-001				
X-O-QU(/ 3/)= 8,63980950053'-002	WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 3,62830867805'+000	SOWIE	P(EMP)-P(THEOR)= 3,62830867805'-003	
X(/ 3/)= -5,60699626409'-001				
X-O-QU(/ 4/)= 2,32707460489'-002	WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 1,82531687431'+000	SOWIE	P(EMP)-P(THEOR)= 1,82531687432'-003	
X(/ 4/)= -2,10266196851'-001				
X-O-QU(/ 5/)= 1,03892468731'-001	WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -3,62706470303'+000	SOWIE	P(EMP)-P(THEOR)= -3,62706470304'-003	
X(/ 5/)= 1,31167232710'-001				
X-O-QU(/ 6/)= 1,65786618122'-001	WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -4,21603636537'+000	SOWIE	P(EMP)-P(THEOR)= -4,21603636528'-003	
X(/ 6/)= 4,81600662268'-001				
X-O-QU(/ 7/)= 1,66678944830'-002	WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -1,28671880066'+000	SOWIE	P(EMP)-P(THEOR)= -1,28671880067'-003	
X(/ 7/)= 8,32634051825'-001				
X-O-QU(/ 8/)= 1,11700242553'-001	WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 2,76085654739'+000	SOWIE	P(EMP)-P(THEOR)= 2,76085654740'-003	
X(/ 8/)= 1,18246752140'+000				
X-O-QU(/ 9/)= 3,21409909790'-001	WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 4,04683246277'+000	SOWIE	P(EMP)-P(THEOR)= 4,04683246279'-003	
X(/ 9/)= 1,53290095093'+000				

```
AUFTRAG 0545  0455IH ** PEARSO      ** UNIVERSITAT SAARBRUCKEN **  MV170H12  31.12.76   SEITE   19

X-O-QU(/  10/)=  2.90632592014'-002    WOBEI  H(EMP)-H(THEOR)=  1.02255648561'+000   SOWIE  P(EMP)-P(THEOR)= .1.02255648561'-003
X(/   10/)=  1.80333438052'+000
X-O-QU(/  11/)=  2.91621410972'-001    WOBEI  H(EMP)-H(THEOR)= -2.62478436250'+000   SOWIE  P(EMP)-P(THEOR)= -2.62478436250'-003
X(/   11/)=  2.23376781005'+000
X-O-QU(/  12/)=  7.46212046433'-002    WOBEI  H(EMP)-H(THEOR)= -1.02294123365'+000   SOWIE  P(EMP)-P(THEOR)= -1.02294123364'-003
X(/   12/)=  2.58420123963'+000
X-O-QU(/  13/)=  1.72286380760'-002    WOBEI  H(EMP)-H(THEOR)=  4.26804129500'-001   SOWIE  P(EMP)-P(THEOR)=  4.26804129504'-004
X(/   15/)=  3.63550152828'+000

ZAHL DER VORZEICHENWECHSEL=    5

STICHPROBENUMFANG =      1000
ZAHL DER KLASSEN          =  13
ZAHL DER FREIHEITSGRADE =    8

  X-O-QUADRAT=  1.68156642909'+000

CHI-QUADRAT ( 95 ) =  1.55100000000'+001

CHI-QUADRAT ( 99 ) =  2.00899999999'+001

CHI-QUADRAT (99.9) =  2.61299999999'+001

DIE HYPOTHESE WIRD ANGENOMMEN.


DABEI.....

INTERVALLWAHRSCHEINLICHKEITEN P(I) UND -HAEUFIGKEITEN H(I)

P1(/   1/)=  3.77883791778'-002    H(/   1/)=  3.77883791775'+001

P1(/   2/)=  1.42133473164'-001    H(/   2/)=  1.42133473164'+002

P1(/   3/)=  1.52371691322'-001    H(/   3/)=  1.52371691322'+002

P1(/   4/)=  1.43174683126'-001    H(/   4/)=  1.43174683126'+002

P1(/   5/)=  1.26627064703'-001    H(/   5/)=  1.26627064703'+002

P1(/   6/)=  1.07216036366'-001    H(/   6/)=  1.07216036365'+002

P1(/   7/)=  8.72867188009'-002    H(/   7/)=  8.72867188007'+001

P1(/   8/)=  6.82391434530'-002    H(/   8/)=  6.82391434526'+001

P1(/   9/)=  5.09531675370'-002    H(/   9/)=  5.09531675372'+001

P1(/  10/)=  3.59774435140'-002    H(/  10/)=  3.59774435144'+001

P1(/  11/)=  2.36247843627'-002    H(/  11/)=  2.36247843625'+001

P1(/  12/)=  1.40229412336'-002    H(/  12/)=  1.40229412337'+001

P1(/  13/)=  7.13994779471'-003    H(/  13/)=  7.13994779473'+000

P1(/  14/)=  2.79047749618'-003    H(/  14/)=  2.79047749617'+000

P1(/  15/)=  6.19376541280'-004    H(/  15/)=  6.19376541279'-001
```

ZUSAETZLICH BEIM CHI-QUADRATTEST BERUECKSICHTIGTE RANDWAHRSCHEINLICHKEITEN.....

P1(/ 16/)= 2.33940383199'-005

5-TER APPROXIMATIONSSCHRITT

MOMENTENWERTE VERAENDERUNG ZUM LETZTEN SCHRITT

0. MOMENT= 1.000000000001+000

1. MOMENT= 1.755503106471-002 V1= 1.010584008241+000

2. MOMENT= 9.298812842751-001 V2= 9.992795126751-001

3. MOMENT= 7.008598143221-001 V3= 1.001894320591+000

4. MOMENT= 2.579583355341+000 V4= 9.984960179971-001
DET(MOM)= 1.125540598061+000

MOMENTENWERTE IM URSPRUENGLICHEN KOORDINATENSYSTEM

1. MOMENT= 3.787898740171+001 V1= 1.000069262051+000

2. MOMENT= 1.624057489741+003 V2= 1.000037524971+000

3. MOMENT= 3.612792652171+005 V3= 9.994333268951-001

4. MOMENT= 4.079688105531+006 V4= 9.999553573911-001

SOMIT ERHAELT MAN

MWERT= 3.787898740171+001 SIGMA= 1.375644587701+001

ZENTRALE MOMENTE

2. ZENTRALES MOMENT= 9.295730770431-001

3. ZENTRALES MOMENT= 6.510961175501-001

4. ZENTRALES MOMENT= 2.532085930961+000

STANDARDISIERTE MOMENTE

3. STANDARD. MOMENT= 7.273661552541-001

4. STANDARD. MOMENT= 2.930295160101+000

PARAMETERWERTE....

TYP I

KAPPA = -2.658445637751-001

BETA1= 5.290615238081-001 BETA2= 2.930295160101+000

A = 8.218973216031-001 BC= -1.886625675081+000

B1= -8.516899290921-001 B2= 3.485102763261-001

X2= -1.406110263601+000 S2= 3.189322305371-001

X1= 3.849911743601+000 S1= 2.550423618991+000

YSTERN = 1.022054727861-002

IM ALTEN KOORDINATENSYSTEM ERGEBEN SICH FOLGENDE WERTE FUER DIE PARAMETER
DER BETRACHTETEN APPROXIMATIONSFUNKTION,.....

X2 = 1.756606552522'+001 S2= 3.189322305371-001

X1 = 9.255921463581+001 S1= 2.550423618991+000

YSTERN= 3.490014379131-007

NUMERISCHE INTEGRATION.....

ZAHL DER ANEINANDERFUEGUNGEN BEI ANWENDUNG DER SIMPSONREGEL = 1096
SUMME DER WAHRSCHEINLICHKEITEN = 9.999499437291-001

DABEI..

P(/ 91/)= 1.600335700911-003

P(/ 549/)= 2.041743312381-005

CHI-QUADRAT-TEST.....

HYPOTHESE,, DIE VORGEGEBENE HAEUFIGKEITSVERTEILUNG LAESST SICH ALS
STICHPROBE DER ANGEGEBENEN PEARSONVERTEILUNG AUFFASSEN

BEITRAEGE DER EINZELNEN KLASSEN ZUM X=0-QUADRAT-WERT

X(/ 0/)= -2.637250860791+000
X-0-QU(/ 1/)= 2.698633414611-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -2.778200131841+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -2.778200131841-003
X(/ 1/)= -1.270566485531+000
X-0-QU(/ 2/)= 3.022062334141-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 2.078537719321+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 2.078537719331-003
X(/ 2/)= -9.201330559681-001
X-0-QU(/ 3/)= 6.989579359101-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 3.267318771221+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 3.267318771221-003
X(/ 3/)= -5.696096266091-001
X-0-QU(/ 4/)= 2.179819044431-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 1.766980654561+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 1.766980654571-003
X(/ 4/)= -2.192066196051-001
X-0-QU(/ 5/)= 9.959133520171-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -3.550111915921+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -3.550111915911-003
X(/ 5/)= 1.311672327101-001
X-0-QU(/ 6/)= 1.575053903741-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -4.108371270821+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -4.108371270831-003
X(/ 6/)= 4.816006622681-001
X-0-QU(/ 7/)= 1.659161706151-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -1.202845050021+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -1.202845050021-003
X(/ 7/)= 8.326340918251-001
X-0-QU(/ 8/)= 1.150446367891-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 2.801050246691+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 2.801050246691-003
X(/ 8/)= 1.182467521401+000
X-0-QU(/ 9/)= 3.212078647451-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 4.045606875341+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 4.045606875231-003
X(/ 9/)= 1.532900950931+000

X-Q-QU(/ 10/)= 2,746823251571-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 9,944886909801-001 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 9,944886909781-004
X(/ 10/)= 1,803334380521+000
X-Q-QU(/ 11/)= 2,902054860551-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -2,660717274061+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -2,660717274071-003
X(/ 11/)= 2,233767810051+000
X-Q-QU(/ 12/)= 7,043830272031-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -1,049781409331+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -1,049781409321-003
X(/ 12/)= 2,584201239631+000
X-Q-QU(/ 13/)= 1,805594120521-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 4,460983622121-001 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 4,460983622181-004
X(/ 15/)= 3,635501528281+000

ZAHL DER VORZEICHENWECHSEL= 5

STICHPROBENUMFANG = 1000
ZAHL DER KLASSEN = 13
ZAHL DER FREIHEITSGRADE = 8

X-Q=QUADRAT= 1,465774155511+000

CHI-QUADRAT (95) = 1,551000000001+001

CHI-QUADRAT (99) = 2,008999999991+001

CHI-QUADRAT (99,9) = 2,612999999991+001

DIE HYPOTHESE WIRD ANGENOMMEN.

DABEI.....

INTERVALLWAHRSCHEINLICHKEITEN P(I) UND =HAEUFIGKEITEN H(I)

P1(/ 1/)= 3,677820013221-002 H(/ 1/)= 3,677820013181+001
P1(/ 2/)= 1,429214622801-001 H(/ 2/)= 1,429214622811+002
P1(/ 3/)= 1,527326812281-001 H(/ 3/)= 1,527326812291+002
P1(/ 4/)= 1,432330193461-001 H(/ 4/)= 1,432330193451+002
P1(/ 5/)= 1,265501119161-001 H(/ 5/)= 1,265501119161+002
P1(/ 6/)= 1,071083712701-001 H(/ 6/)= 1,071083712711+002
P1(/ 7/)= 8,720284505031-002 H(/ 7/)= 8,720284505001+001
P1(/ 8/)= 6,819894975341-002 H(/ 8/)= 6,819894975331+001
P1(/ 9/)= 5,095439112461-002 H(/ 9/)= 5,095439112471+001
P1(/ 10/)= 3,600551130881-002 H(/ 10/)= 3,600551130901+001
P1(/ 11/)= 2,366071727441-002 H(/ 11/)= 2,366071727411+001
P1(/ 12/)= 1,404978140931-002 H(/ 12/)= 1,404978140931+001
P1(/ 13/)= 7,147907276481-003 H(/ 13/)= 7,147907276461+000
P1(/ 14/)= 2,780650362511-003 H(/ 14/)= 2,780650362491+000
P1(/ 15/)= 6,049265657001-004 H(/ 15/)= 6,049265656981-001

ZUSÄTZLICH BEIM CHI-QUADRATTEST BERÜCKSICHTIGTE RANDWAHRSCHEINLICHKEITEN.....

P1(/ 16/)= 2.04174331236'-005

6-TER APPROXIMATIONSSCHRITT

MOMENTENWERTE VERAENDERUNG ZUM LETZTEN SCHRITT

0. MOMENT= 1,000000000000'+000

1. MOMENT= 1,75975902200'-002 V1= 1,00237860304'+000

2. MOMENT= 9,29727182062'-001 V2= 9,99834277540'-001

3. MOMENT= 7,01148731208'-001 V3= 1,00041223207'+000

4. MOMENT= 2,57066439683'+000 V4= 9,99643757001'-001

DET(MCH)= 1,12433989445'+000

MOMENTENWERTE IM URSPRUENGLICHEN KOORDINATENSYSTEM

1. MOMENT= 3,78795832116'+001 V1= 1,00001572928'+000

2. MOMENT= 1,62407095693'+003 V2= 1,00000829232'+000

3. MOMENT= 3,61232106278'+005 V3= 9,99869466799'-001

4. MOMENT= 4,07963679144'+006 V4= 9,99987422056'-001

SOMIT ERHAELT MAN

MWERT= 3,78795832116'+001 SIGMA= 1,37552947129'+001

ZENTRALE MOMENTE

2. ZENTRALES MOMENT= 9,29417306879'-001

3. ZENTRALES MOMENT= 6,52076756385'-001

4. ZENTRALES MOMENT= 2,53103747749'+000

STANDARDISIERTE MOMENTE

3. STANDARD. MOMENT= 7,27750389724'-001

4. STANDARD. MOMENT= 2,93006246042'+000

PARAMETERWERTE....

TYP I

KAPPA = -2,65043210102'-001

BETA1= 5,29620629743'-001 BETA2= 2,93006246042'+000

A = 8,23730315216'-001 B0= -1,88922233717'+000

B1= -8,53631450675'-001 B2= 3,49580399612'-001

X2= -1,40488545236'+000 S2= 3,16555318932'-001

X1= 9,84675991570'+000 S1= 2,54401695886'+000

YSTERN = 1,03402156060'-002

IM ALTEN KOORDINATENSYSTEM ERGEBEN SICH FOLGENDE WERTE UEBER DIE PARAMETER
DER BETRACHTETEN APPROXIMATIONSFUNKTION.....

X2 = 1,75835309150'+001 S2= 3,16555318932'-001

X1 = 9,25142442128'+001 S1= 2,54401695886'+000

YSTERN= 3,61428256140'-007

NUMERISCHE INTEGRATION.....

ZAHL DER ANEINANDERFUEGUNGEN BEI ANWENDUNG DER SIMPSONREGEL = 1096
SUMME DER WAHRSCHEINLICHKEITEN = 9,99955393487'-001

DABEI..

P(/ 91/)= 1,41356825417'-003

P(/ 549/)= 1,97515926490'-005

CHI-QUADRAT-TEST.....

HYPOTHESE.. DIE VORGEGEBENE HAEUFIGKEITSVERTEILUNG LAESST SICH ALS
STICHPROBE DER ANGEGEBENEN PEARSONVERTEILUNG AUFFASSEN

REITRAEGE DER EINZELNEN KLASSEN ZUM X(/ 0/)= -2,63725686079'+000	X-0-QUADRAT-WERT				
X-0-QU(/ 1/)= 1,79344017295'-001	WOBEI	H(EMP)-H(THEOR)= -2,56065109745'+000	SOWIE	P(EMP)-P(THEUR)= -2,56065109744'-003	
X(/ 1/)= -1,27056648553'+000					
X-0-QU(/ 2/)= 2,51518272194'-002	WOBEI	H(EMP)-H(THEOR)= 1,89718142711'+000	SOWIE	P(EMP)-P(THEOR)= 1,89718142711'-003	
X(/ 2/)= -9,20133655966'-001					
X-0-QU(/ 3/)= 6,63911122574'-002	WOBEI	H(EMP)-H(THEOR)= 3,18520706892'+000	SOWIE	P(EMP)-P(THEOR)= 3,18520706892'-003	
X(/ 3/)= -5,69699626409'-001					
X-0-QU(/ 4/)= 2,14801779048'-002	WOBEI	H(EMP)-H(THEOR)= 1,75412283652'+000	SOWIE	P(EMP)-P(THEOR)= 1,75412283652'-003	
X(/ 4/)= -2,19266196851'-001					
X-0-QU(/ 5/)= 9,86104633485'-002	WOBEI	H(EMP)-H(THEOR)= -3,53233810514'+000	SOWIE	P(EMP)-P(THEOR)= -3,53233810515'-003	
X(/ 5/)= 1,31167232710'-001					
X-0-QU(/ 6/)= 1,55745478642'-001	WOBEI	H(EMP)-H(THEOR)= -4,08384933230'+000	SOWIE	P(EMP)-P(THEOR)= -4,08384933235'-003	
X(/ 6/)= 4,81600662268'-001					
X-0-QU(/ 7/)= 1,60772795841'-002	WOBEI	H(EMP)-H(THEOR)= -1,18392582145'+000	SOWIE	P(EMP)-P(THEOR)= -1,18392582145'-003	
X(/ 7/)= 8,32034091825'-001					
X-0-QU(/ 8/)= 1,15729379328'-001	WOBEI	H(EMP)-H(THEOR)= 2,80992638692'+000	SOWIE	P(EMP)-P(THEOR)= 2,80992638692'-003	
X(/ 8/)= 1,18246752140'+000					
X-0-QU(/ 9/)= 3,21114013816'-001	WOBEI	H(EMP)-H(THEOR)= 4,04504037183'+000	SOWIE	P(EMP)-P(THEOR)= 4,04504037192'-003	
X(/ 9/)= 1,53290095093'+000					

```
AUFTRAG 0845  045SHH ** PEARSO      ** UNIVERSITAT SAARBRUCKEN **  MV170812  31.12.76   SEITE   27

X-O-QU(/  10/)=  2,70984019671'-002    WOBEI  H(EMP)-H(THEOR)=  9,87862030044'-001    SOWIE  P(EMP)-P(THEOR)=  9,87862030044'-004
X(/   10/)=  1,08333436052'+000
X-O-QU(/  11/)=  3,06972325673'-001    WOBEI  H(EMP)-H(THEOR)= -2,66903037019'+000    SOWIE  P(EMP)-P(THEOR)= -2,66903037019'-003
X(/   11/)=  2,23376781005'+000
X-O-QU(/  12/)=  7,93195615734'-002    WOBEI  H(EMP)-H(THEOR)= -1,05589164345'+000    SOWIE  P(EMP)-P(THEOR)= -1,05589164345'-003
X(/   12/)=  2,56420123963'+000
X-O-QU(/  13/)=  1,92774161956'-002    WOBEI  H(EMP)-H(THEOR)=  4,50952740852'-001    SOWIE  P(EMP)-P(THEOR)=  4,50952740849'-004
X(/   15/)=  3,63550152828'+000

ZAHL DER VORZEICHENWECHSEL=    5

STICHPROBENUMFANG =    1000
ZAHL DER KLASSEN        =  13
ZAHL DER FREIHEITSGRADE =   8

  X-O-QUADRAT=  1.42637145479'+000

CHI-QUADRAT ( 95 ) =  1,55100000000'+001

CHI-QUADRAT ( 99 ) =  2,00899999999'+001

CHI-QUADRAT (99,9) =  2,61299999999'-001

DIE HYPOTHESE WIRD ANGENOMMEN.


DABEI.....

INTERVALLWAHRSCHEINLICHKEITEN P(I) UND -HAEUFIGKEITEN H(I)

P1(/   1/)=  3.65606510970'-002    H(/   1/)=  3,65606510975'+001
P1(/   2/)=  1.43102818573'-001    H(/   2/)=  1,43102818573'+002
P1(/   3/)=  1.52814792931'-001    H(/   3/)=  1,52814792931'+002
P1(/   4/)=  1.43245877163'-001    H(/   4/)=  1,43245877164'+002
P1(/   5/)=  1.26532338105'-001    H(/   5/)=  1,26532338105'+002
P1(/   6/)=  1.07083849332'-001    H(/   6/)=  1,07083849332'+002
P1(/   7/)=  8,71839258216'-002    H(/   7/)=  8,71839258215'+001
P1(/   8/)=  6,81900736126'-002    H(/   8/)=  6,81900736131'+001
P1(/   9/)=  5.09549596284'-002    H(/   9/)=  5,09549596282'+001
P1(/  10/)=  3.60121379704'-002    H(/  10/)=  3,60121379700'+001
P1(/  11/)=  2.36690303702'-002    H(/  11/)=  2,36690303702'+001
P1(/  12/)=  1.40558916435'-002    H(/  12/)=  1,40558916435'+001
P1(/  13/)=  7.14959021161'-003    H(/  13/)=  7,14959021163'+000
P1(/  14/)=  2.77821091315'-003    H(/  14/)=  2,77821091312'+000
P1(/  15/)=  6.01494541726'-004    H(/  15/)=  6,01494541726'-001
```

ZUSÄTZLICH BEIM CHI-QUADRATTEST BERÜCKSICHTIGTE RANDWAHRSCHEINLICHKEITEN.....

P1(/ 16/)= 1.97515926494'-005

7-TEK APPROXIMATIONSSCHRITT

MOMENTENWERTE VERAENDERUNG ZUM LETZTEN SCHRITT

0. MOMENT= 1,000000000001+000

1. MOMENT= 1,760550512951-002 V1= 1,000449772341+000

2. MOMENT= 9,296962547161-001 V2= 9,999667350311-001

3. MOMENT= 7,012045520881-001 V3= 1,000079613471+000

4. MOMENT= 2,578467665421+000 V4= 9,999237080191-001

DET(MOM)= 1,124088884981+000

MOMENTENWERTE IN URSPRUENGLICHEN KOORDINATENSYSTEM

1. MOMENT= 3,787969614191+001 V1= 1,000002981281+000

2. MOMENT= 1,624073159621+003 V2= 1,000001356301+000

3. MOMENT= 3,612226072661+005 V3= 9,999737038561-001

4. MOMENT= 4,079623621401+006 V4= 9,999667717601-001

SOMIT ERHAELT MAN

MWERT= 3,787969614191+001 SIGMA= 1,375506378801+001

ZENTRALE MOMENTE

2. ZENTRALES MOMENT= 9,293863009041-001

3. ZENTRALES MOMENT= 6,521121493281-001

4. ZENTRALES MOMENT= 2,530816113231+000

STANDARDISIERTE MOMENTE

3. STANDARD. MOMENT= 7,278265458011-001

4. STANDARD. MOMENT= 2,930002948791+000

PARAMETERWERTE....

TYP I

KAPPA = -2,658390490721-001

BETA1= 5,297314807721-001 BETA2= 2,930002948791+000

A = 8,241155632911-001 BC= -1,889778985991+000

B1= -8,540381782811-001 B2= 3,498079086491-001

X2= =1.40463295661'+000 S2= 3.160552683961'-001

X1= 3.846081984031'+000 S1= 2.542653543821'+000

YSTERN = 1.036503358221'-002

IN ALTEN KOORDINATENSYSTEM ERGEBEN SICH FOLGENDE WERTE FUER DIE PARAMETER
DER BETRACHTETEN APPROXIMATIONSFUNKTION.....

X2 = 1.758713353521'+001 S2= 3.160582683961'-001

X1 = 9.250457146581'+001 S1= 2.542653543821'+000

YSTERN= 3.641198837831'-007

NUMERISCHE INTEGRATION.....

ZAHL DER ANEINANDERFUEGUNGEN BEI ANWENDUNG DER SIMPSONKEGEL = 1096
SUMME DER WAHRSCHEINLICHKEITEN = 9.999565130241'-001

DABEI..

P(/ 91/)= 1.375486828651'-003

P(/ 549/)= 1.960909597631'-005

CHI-QUADRAT-TEST.....

HYPOTHESE.. DIE VORGEGEBENE HAEUFIGKEITSVERTEILUNG LAESST SICH ALS
STICHPROBE DER ANGEGEBENEN PEARSONVERTEILUNG AUFFASSEN

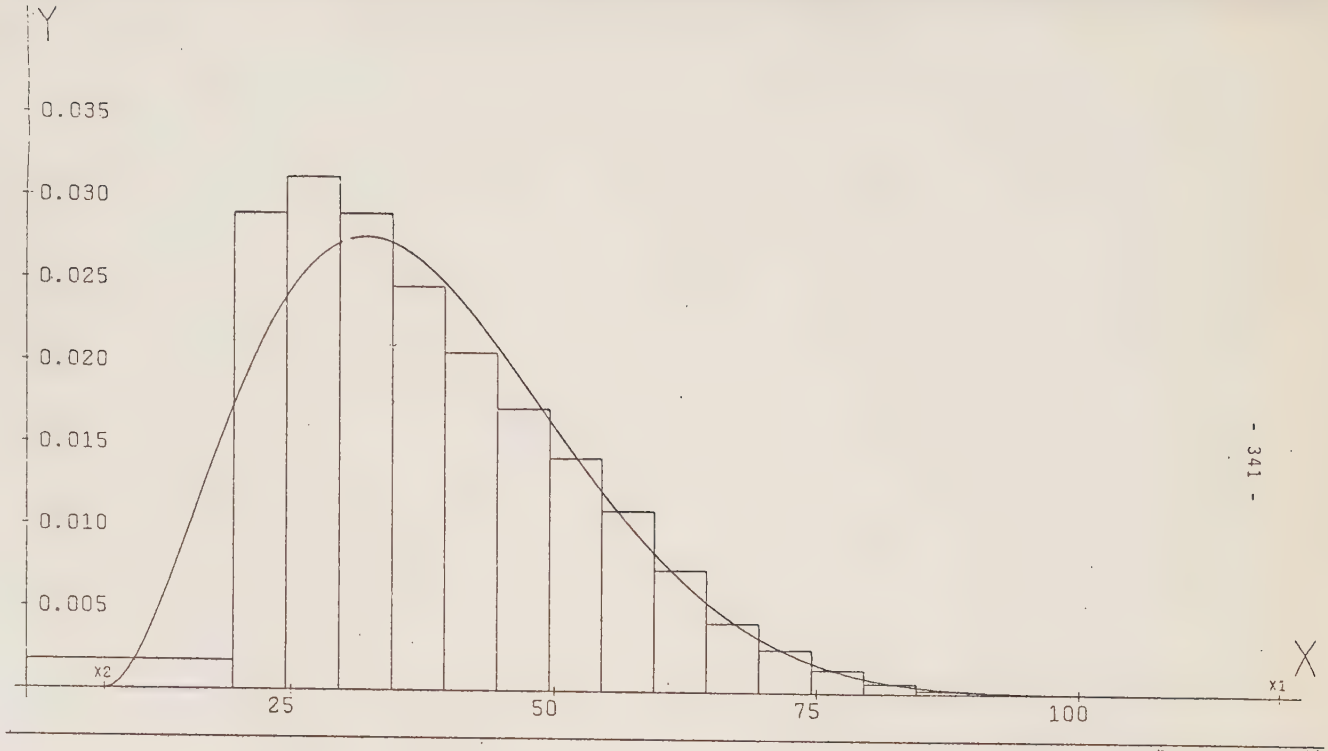
BEITRAEGE DER EINZELNEN KLASSEN ZUM X-O-QUADRAT-WERT

X(/ 0/)= -2.637256860791'+000
X-O-QU(/ 1/)= 1.733683373061'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -2.516095128841'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -2.516095128841'-003
X(/ 1/)= -1.270566485531'+000
X-O-QU(/ 2/)= 2.415109486271'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 1.859302173371'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 1.859302173371'-003
X(/ 2/)= -9.201330559661'-001
X-O-QU(/ 3/)= 6.508605907521'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 3.168422951361'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 3.168422951361'-003
X(/ 3/)= -5.696096264091'-001
X-O-QU(/ 4/)= 2.142258687151'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 1.751784041521'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 1.751784041531'-003
X(/ 4/)= -2.192661968511'-001
X-O-QU(/ 5/)= 9.039333322691'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -3.528392018751'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -3.528392018751'-003
X(/ 5/)= 1.311672327101'-001
X-O-QU(/ 6/)= 1.553541463001'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -4.078615812591'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -4.078615812661'-003
X(/ 6/)= 4.816006622681'-001
X-O-QU(/ 7/)= 1.597051615731'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -1.179961432701'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -1.179961432701'-003
X(/ 7/)= 8.320340910251'-001
X-O-QU(/ 8/)= 1.159410435211'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 2.811728882601'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 2.811728882611'-003
X(/ 8/)= 1.102467521401'+000
X-O-QU(/ 9/)= 3.210812617331'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 4.044841954491'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 4.044841954511'-003
X(/ 9/)= 1.532900950931'+000

```
AUFTRAG 0845  0455HH ** PEARSO      ** UNIVERSITÄT SAARBRUCKEN **  HV170d12  31,12,76   SEITE   31

X-O-QU(/  10/)=  2,70172306184'-002    WOBEI  H(EMP)-H(THEOR)=  9,86401388422'-001    SOWIE  P(EMP)-P(THEOR)= 9,86401388417'-004
X(/   10/)=  1,85333438052'+000
X-O-QU(/  11/)=  3,01352711958'-001    WOBEI  H(EMP)-H(THEOR)= -2,67081728764'+000    SOWIE  P(EMP)-P(THEOR)= -2,67081728764'-003
X(/   11/)=  2,23376781005'+000
X-O-QU(/  12/)=  7,95060942910'-002    WOBEI  H(EMP)-H(THEOR)= -1,05718094658'+000    SOWIE  P(EMP)-P(THEOR)= -1,05718094657'-003
X(/   12/)=  2,50420123963'+000
X-O-QU(/  13/)=  1,93749537789'-002    WOBEI  H(EMP)-H(THEOR)=  4,52068236424'-001    SOWIE  P(EMP)-P(THEOR)=  4,52068236427'-004
X(/   15/)=  3,63550152828'+000

ZAHL DER VORZEICHENWECHSEL=    5

STICHPROBENUMFANG =     1000
ZAHL DER KLASSEN        =  13
ZAHL DER FREIHEITSGRADE =   8

  X-O-QUADRAT=  1,41861936951'+000

CHI-QUADRAT ( 95 ) =  1,55100000000'+001

CHI-QUADRAT ( 99 ) =  2,00899999999'+001

CHI-QUADRAT (99,9) =  2,61299999999'+001

DIE HYPOTHESE WIRD ANGENOMMEN,


DABEI.....

INTERVALLWAHRSCHEINLICHKEITEN P(I) UND -HAEUFIGKEITEN H(I)

P1(/   1/)=  3,65160951292'-002    H(/   1/)=  3,65160951288'+001

P1(/   2/)=  1,43140697826'-001    H(/   2/)=  1,43140697827'+002

P1(/   3/)=  1,52831577048'-001    H(/   3/)=  1,52831577049'+002

P1(/   4/)=  1,43248215958'-001    H(/   4/)=  1,43248215959'+002

P1(/   5/)=  1,26528392018'-001    H(/   5/)=  1,26528392019'+002

P1(/   6/)=  1,07078615813'-001    H(/   6/)=  1,07078615813'+002

P1(/   7/)=  8,71799614324'-002    H(/   7/)=  8,71799614327'+001

P1(/   8/)=  6,81882711178'-002    H(/   8/)=  6,81882711174'+001

P1(/   9/)=  5,09551580458'-002    H(/   9/)=  5,09551580455'+001

P1(/  10/)=  3,60135986111'-002    H(/  10/)=  3,60135986116'+001

P1(/  11/)=  2,36708172877'-002    H(/  11/)=  2,36708172876'+001

P1(/  12/)=  1,40571809466'-002    H(/  12/)=  1,40571809466'+001

P1(/  13/)=  7,14991903419'-003    H(/  13/)=  7,14991903422'+000

P1(/  14/)=  2,77765902791'-003    H(/  14/)=  2,77765902790'+000

P1(/  15/)=  6,00744605478'-004    H(/  15/)=  6,00744605479'-001
```

ZUSALTZLICH BEIM CHI-QUADRATTEST BERUECKSICHTIGTE RANDWAHRSCHEINLICHKEITEN.....

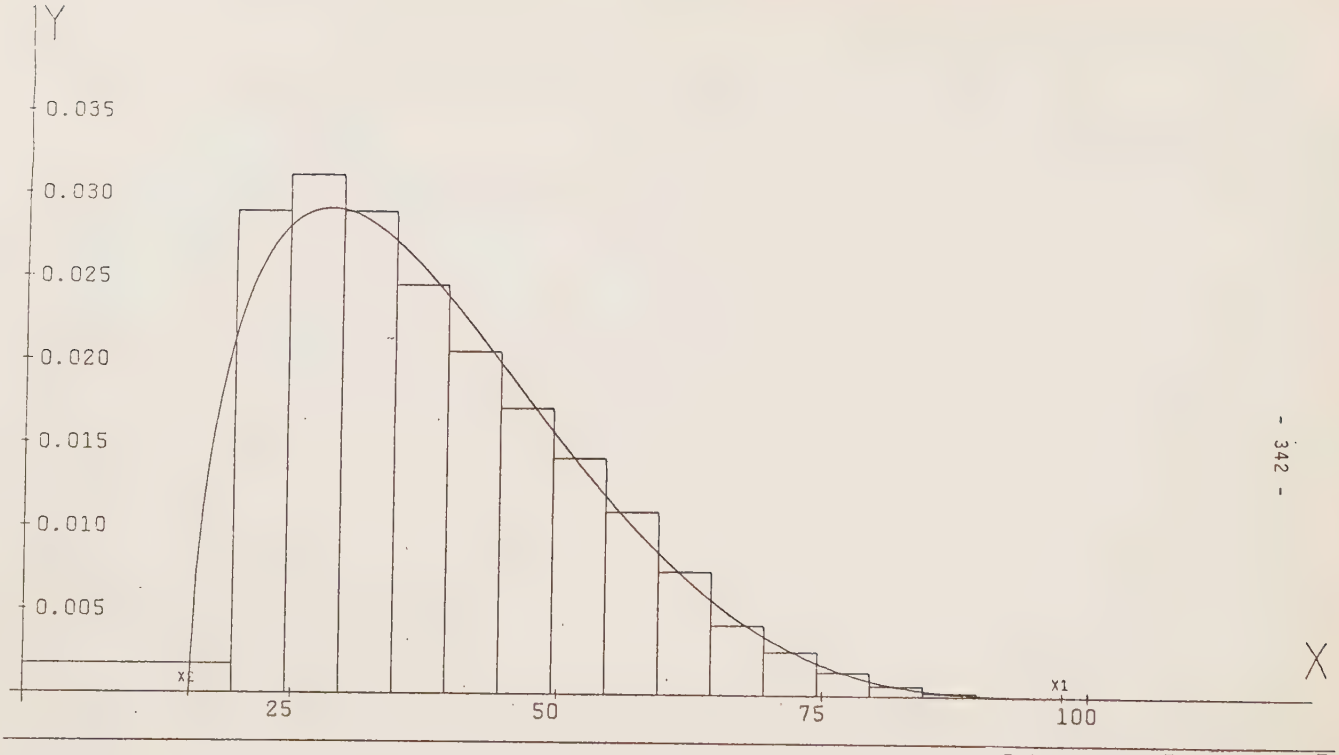
P1(/ 16/)= 1.96090959763'-005



Zeichnung [5.2 - B1 - Z1]

KRANKHEITSRISIKØ (NACH ALTERSGRUPPEN)

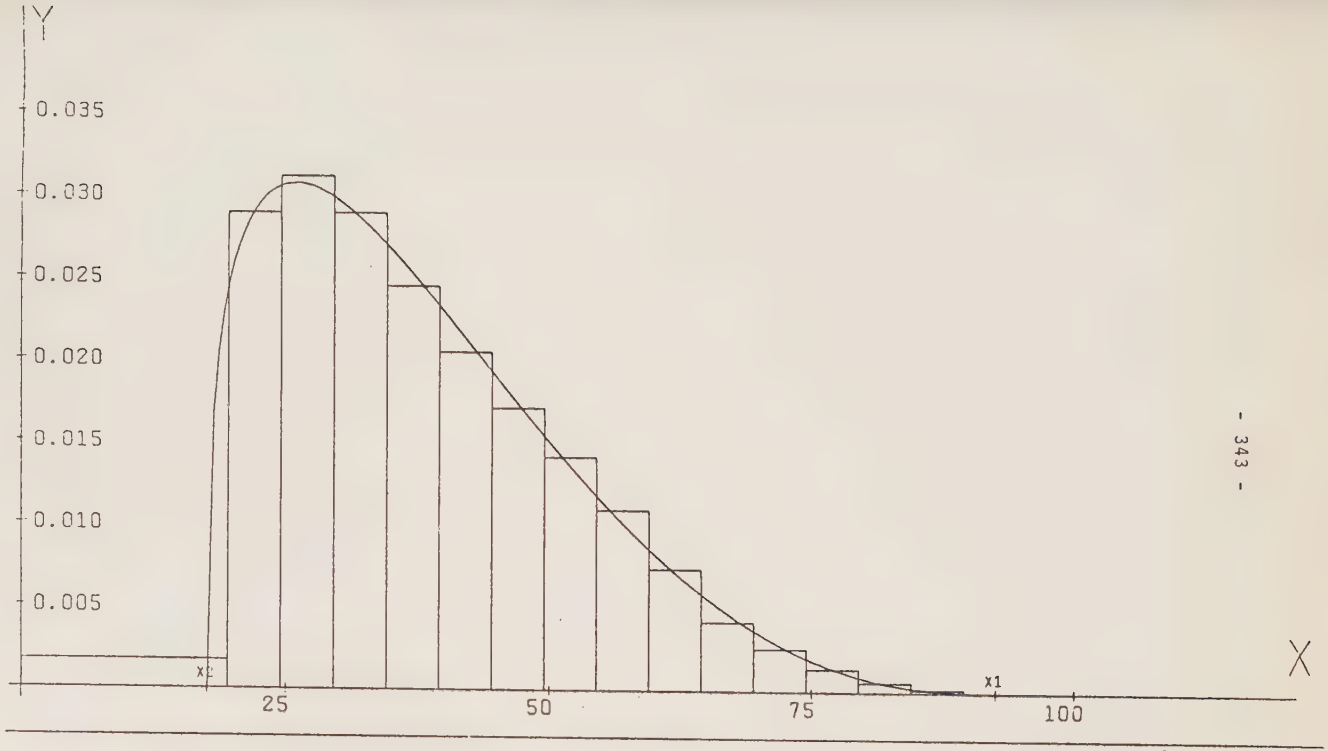
1. APPRØXIMATIØNSSCHRITT



Zeichnung [5.2 - B1 - Z2]

KRANKHEITSRISIKO (NACH ALTERSGRUPPEN)

2. APPROXIMATIONSSCHRITT



Zeichnung [5.2 - B1 - Z3]

KRANKHEITSRISIKØ (NACH ALTERSGRUPPEN)

7. APPRØXIMATIØNSSCHRITT

Beispiel [5.2 - B2]

PROBLEMSTELLUNG

BEISPIEL AUS ELDERTON/JOHNSON S. 5 (EXAMPLE 2 OF TABLE 1), VERSION 2
EXPOSED TO RISK OF SICKNESS (URSPR. QUELLE WATSON, TABLES, S. 19)

AUSGANGSDATEN

INTERVALL	KLASSENGRENZE	HAEUFIGKEIT(ABS.)	HAEUFIGKEIT(REL.)
	1,450000000001+001		
1	1,950000000001+001	34	3,400000000011-002
2	2,450000000001+001	145	1,450000000001-001
3	2,950000000001+001	156	1,559999999991-001
4	3,450000000001+001	145	1,450000000001-001
5	3,950000000001+001	123	1,230000000001-001
6	4,450000000001+001	103	1,029999999991-001
7	4,950000000001+001	86	8,599999999931-002
8	5,450000000001+001	71	7,099999999991-002
9	5,950000000001+001	55	5,500000000011-002
10	6,450000000001+001	37	3,700000000001-002
11	6,950000000001+001	21	2,100000000001-002
12	7,450000000001+001	13	1,299999999991-002
13	7,950000000001+001	7	7,000000000061-003
14	8,450000000001+001	3	3,000000000001-003
15	8,950000000001+001	1	1,000000000011-003

ES WIRD EINE KOORDINATENTRANSFORMATION VORGENOMMEN, UND ZWAR WIRD GESETZT
X-NEU = (X-ALT - (GESCHAETZTER) MITTELWERT) / (GESCHAETZTE) STANDARDABWEICHUNG.

ES WURDEN FOLGENDE WERTE GESCHAETZT.....

MITTELWERT = 3,787500000001+001

STANDARDABWEICHUNG = 1,384049764401+001

1-TER APPROXIMATIONSSCHRITT

MOMENTENWERTE

0. MOMENT= 1.000000000000'+000

1. MOMENT= 3.02691205434'-012

2. MOMENT= 9.999999998361'-001

3. MOMENT= 7.122460846911'-001

4. MOMENT= 2.935095082621'+000

DET(MOM)= 1.427800597451'+000

MOMENTENWERTE IM URSPRUENGLICHEN KOORDINATENSYSTEM

1. MOMENT= 3.787500000001'+001

2. MOMENT= 1.626075000001'+003

3. MOMENT= 3.574719990461'+005

4. MOMENT= 4.100394675111'+006

SOMIT ERHAELT MAN

MWERT= 3.787500000001'+001 SIGMA= 1.384049764291'+001

ZENTRALE MOMENTE

2. ZENTRALES MOMENT= 9.999999998361'-001

3. ZENTRALES MOMENT= 7.122460846841'-001

4. ZENTRALES MOMENT= 2.935095082621'+000

STANDARDISIERTE MOMENTE

3. STANDARD. MOMENT= 7.122460848621'-001

4. STANDARD. MOMENT= 2.935095083551'+000

PARAMETERWERTE....

TYP I

KAPPA = -2.646909490611'-001

BETA1= 5.072944053001'-001 BETA2= 2.935095083551'+000

A = 8.031376247381'-001 B0= -1.941418826461'+000

B1= -8.031376247421'-001 B2= 3.138062755901'-001

X2= -1.51751277561'+000 S2= 4.069243776291-001

X1= 4.07685491513'+000 S1= 2.779755041471+000

YSTERN = 5.813562641381-003

IM ALTEN KOORDINATENSYSTEM ERGEBEN SICH FOLGENDE WERTE FUER DIE PARAMETER
DER BETRACHTETEN APPROXIMATIONSFUNKTION,.....

X2 = 1.68718600041'+001 S2= 4.069243776291-001

X1 = 9.43007008480'+001 S1= 2.779755041471+000

YSTERN= 9.700765267461-008

NUMERISCHE INTEGRATION.....

ZAHL DER AUFEINANDERFOLGUNGEN BEI ANWENDUNG DER SIMPSONREGEL = 960
SUMME DER WAHRSCHEINLICHKEITEN = 0.999853249741-001

DABEI..

P(/ 16/)= 6.651637987011-004

P(/ 481/)= 5.547749467371-005

CHI-QUADRAT-TEST.....

HYPOTHESE.. DIE VORGEGEBENE HAEUFIGKEITSVERTEILUNG LAESST SICH ALS
STICHPROBE DER ANGEGEBENEN PEARSONVERTEILUNG AUFFASSEN

BEITRAEGE DER EINZELNEN KLASSEN ZUM X-0-QUADRAT-WERT

X(/ 0/)= -1.60888435961'+000
X-0-QU(/ 1/)= 2.78655539441'+000 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -1.12260853406'+001 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -1.12260853407'-002
X(/ 1/)= -1.32762567301'+000
X-0-QU(/ 2/)= 5.02801525850'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 8.29081344609'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 8.29081344614'-003
X(/ 2/)= -9.66366986508'-001
X-0-QU(/ 3/)= 2.93287704270'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 6.61903322302'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 6.61903322293'-003
X(/ 3/)= -6.05108299962'-001
X-0-QU(/ 4/)= 5.23545099666'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 2.72919889540'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 2.72919889540'-003
X(/ 4/)= -2.43849613420'-001
X-0-QU(/ 5/)= 1.13560950125'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -3.79459011275'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -3.79459011275'-003
X(/ 5/)= 1.17409673126'-001
X-0-QU(/ 6/)= 2.09665319453'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -4.75311382487'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -4.75311382479'-003
X(/ 6/)= 4.76667759671'-001
X-0-QU(/ 7/)= 3.68473791232'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -1.79865233693'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -1.79865233693'-003
X(/ 7/)= 8.39920446217'-001
X-0-QU(/ 8/)= 8.69544296293'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 2.44160925690'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 2.44160925691'-003
X(/ 8/)= 1.20118513278'+000
X-0-QU(/ 9/)= 3.03634104541'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 3.93755015638'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 3.93755015648 -003
X(/ 9/)= 1.56244361930'+000

X-0-QU(/ 10/)= 3,09755682283'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 1,05518298503'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 1,05518298503'-003
X(/ 10/)= 1,92370250588'+000
X-0-QU(/ 11/)= 2,76172160757'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -2,55028079264'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -2,55028079263'-003
X(/ 11/)= 2,24961192401'+000
X-0-QU(/ 12/)= 7,00278200331'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -9,95630456775'-001 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -9,95630456771'-004
X(/ 12/)= 2,64621987692'+000
X-0-QU(/ 13/)= 3,22936771298'-004 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 5,94399624388'-002 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 5,94399624392'-005
X(/ 15/)= 3,72999593860'+000

ZAHL DER VORZEICHENWECHSEL= 5

STICHPROBENUMFANG = 1000
ZAHL DER KLASSEN = 13
ZAHL DER FREIHEITSGRADE = 8

X-0-QUADRAT= 4,76395987207'+000

CHI-QUADRAT (95) = 1,55100000000'+001

CHI-QUADRAT (99) = 2,00899999999'+001

CHI-QUADRAT (99,9) = 2,61299999999'+001

DIE HYPOTHESE WIRD ANGENOMMEN.

DABEI.....

INTERVALLGRENZEN X(I), SOWIE -WAHRSCHEINLICHKEITEN P(I) UND -HAEUFIGKEITEN H(I)
DER BETRACHTETEN APPROXIMATIONSFUNKTION.....

X (/ 0/)= -1,60888435961'+000

P1(/ 1/)= 4,52260853406'-002 H(/ 1/)= 4,52260853406'+001

X (/ 1/)= -1,32762567303'+000

P1(/ 2/)= 1,36709186554'-001 H(/ 2/)= 1,36709186554'+002

X (/ 2/)= -9,60366986508'-001

P1(/ 3/)= 1,49380966777'-001 H(/ 3/)= 1,49380966777'+002

X (/ 3/)= -6,05100299962'-001

P1(/ 4/)= 1,42270801105'-001 H(/ 4/)= 1,42270801105'+002

X (/ 4/)= -2,43849613420'-001

P1(/ 5/)= 1,26794590113'-001 H(/ 5/)= 1,26794590113'+002

X (/ 5/)= 1,17409073126'-001

P1(/ 6/)= 1,07753113825'-001 H(/ 6/)= 1,07753113825'+002

X (/ 6/)= 4,78667759671'-001

P1(/ 7/)= 8,77986523374'-002 H(/ 7/)= 8,77986523369'+001

X (/ 7/)= 8,39926446217'-001

P1(/ 8/)= 6.85583907434'-002 H(/ 8/)= 6,85583907431'+001

X (/ 8/)= 1.20118513278'+000

P1(/ 9/)= 5.10624498434'-002 H(/ 9/)= 5,10624498436'+001

X (/ 9/)= 1.50244381930'+000

P1(/ 10/)= 3.59448170148'-002 H(/ 10/)= 3,59448170150'+001

X (/ 10/)= 1.92370250388'+000

P1(/ 11/)= 2.35502807930'-002 H(/ 11/)= 2,35502807926'+001

X (/ 11/)= 2.20496119240'+000

P1(/ 12/)= 1.39956304568'-002 H(/ 12/)= 1,39956304568'+001

X (/ 12/)= 2.64621987892'+000

P1(/ 13/)= 7.20527305884'-003 H(/ 13/)= 7,20527305883'+000

X (/ 13/)= 3.00747056550'+000

P1(/ 14/)= 2.92988147925'-003 H(/ 14/)= 2,92988147924'+000

X (/ 14/)= 3.36873725202'+000

P1(/ 15/)= 7.49928004794'-004 H(/ 15/)= 7,49928004792'-001

X (/ 15/)= 3.72999593860'+000

ZUSAETZLICH BEIM CHI-QUADRATTEST BERUECKSICHTIGTE RANDWAHRSCHEINLICHKEITEN.....

P1(/ 16/)= 5.54774946737'-005

ES WIRD VERSUCHT, DIE APPROXIMATIONSGUETE ZU VERBESSERN,

DIES GESCHIEHT MIT HILFE DER ZERLEGUNG F, DIE SICH AUS DER VORGEGEBENEN
INTERVALLZERLEGUNG (ZERLEGUNG G) ERGIBT, INDEM DIE INTERVALLE VON G IN N(/I/)
AEQUIDISTANTE TEILINTERVALLE AUFGETEILT WERDEN.

N(/ 1/) = 32
N(/ 2/) = 32
N(/ 3/) = 32
N(/ 4/) = 32
N(/ 5/) = 32
N(/ 6/) = 32
N(/ 7/) = 32
N(/ 8/) = 32
N(/ 9/) = 32
N(/ 10/) = 32
N(/ 11/) = 32
N(/ 12/) = 32
N(/ 13/) = 32
N(/ 14/) = 32
N(/ 15/) = 32

GESAMTZAHL DER INTERVALLE VON F = 480

6-TER APPROXIMATIONSSCHRITT

MOMENTENWERTE VERÄNDERUNG ZUM LETZTEN SCHRITT

0. MOMENT= 1.000000000001+000

1. MOMENT= 3.404012872611-004 V1= 1.009069142111+000

2. MOMENT= 9.876880421831-001 V2= 9.999876554721-001

3. MOMENT= 7.154452258441-001 V3= 1.000032288601+000

4. MOMENT= 2.859261457111+000 V4= 9.999712249341-001

DET(MOM)= 1.349160215061+000

MOMENTENWERTE IM URSPRÜNGLICHEN KOORDINATENSYSTEM

1. MOMENT= 3.787971132341+001 V1= 1.000001117821+000

2. MOMENT= 1.624073411821+003 V2= 1.000000536851+000

3. MOMENT= 3.537917622951+005 V3= 9.999903062671-001

4. MOMENT= 4.079621282231+006 V4= 9.999988623821-001

SOMIT ERHAELT MAN

MWERT= 3.787971132341+001 SIGMA= 1.375503114801+001

ZENTRALE MOMENTE

2. ZENTRALES MOMENT= 9.876879263101-001

3. ZENTRALES MOMENT= 7.144365950811-001

4. ZENTRALES MOMENT= 2.858287989861+000

STANDARDISIERTE MOMENTE

3. STANDARD. MOMENT= 7.278369082381-001

4. STANDARD. MOMENT= 2.929992405471+000

PARAMETERWERTE....

TYP I

KAPPA = -2.658377690571-001

BETA1= 5.297465649931-001 BETA2= 2.929992405471+000

A = 8.674413734731-001 B0= -2.023995467171+000

B1= -8.680199478221-001 B2= 3.498416007061-001

X2= -1.46579619014'+000 S2= 3.15985812469'-001

X1= 3.94697609003'+000 S1= 2.54245068558'+000

YSTERN = 9.22111553109'-003

IM ALTEN KOORDINATENSYSTEM ERGEBEN SICH FOLGENDE WERTE FUER DIE PARAMETER
DER BETRACHTETEN APPROXIMATIONSFUNKTION,.....

X2 = 1.73076512835'+001 S2= 3.15965812489'-001

X1 = 9.25031132745'+001 S1= 2.54245068558'+000

YSTERN= 3.64520596319'-007

NUMERISCHE INTEGRATION,.....

ZAHL DER ANEINANDERFUEGUNGEN BEI ANWENDUNG DER SIMPSONREGEL = 960
SUMME DER WAHRSCHEINLICHKEITEN = 9.99993097470'-001

DABEI..

P(/ 20/)= 2.06928604680'-004

P(/ 481/)= 1.95875444495'-005

CHI-QUADRAT-TEST.....

HYPOTHESE.. DIE VORGEGEBENE HAEUFIGKEITSVERTEILUNG LAESST SICH ALS
STICHPROBE DER ANGEGEBENEN PEARSONVERTEILUNG AUFFASSEN

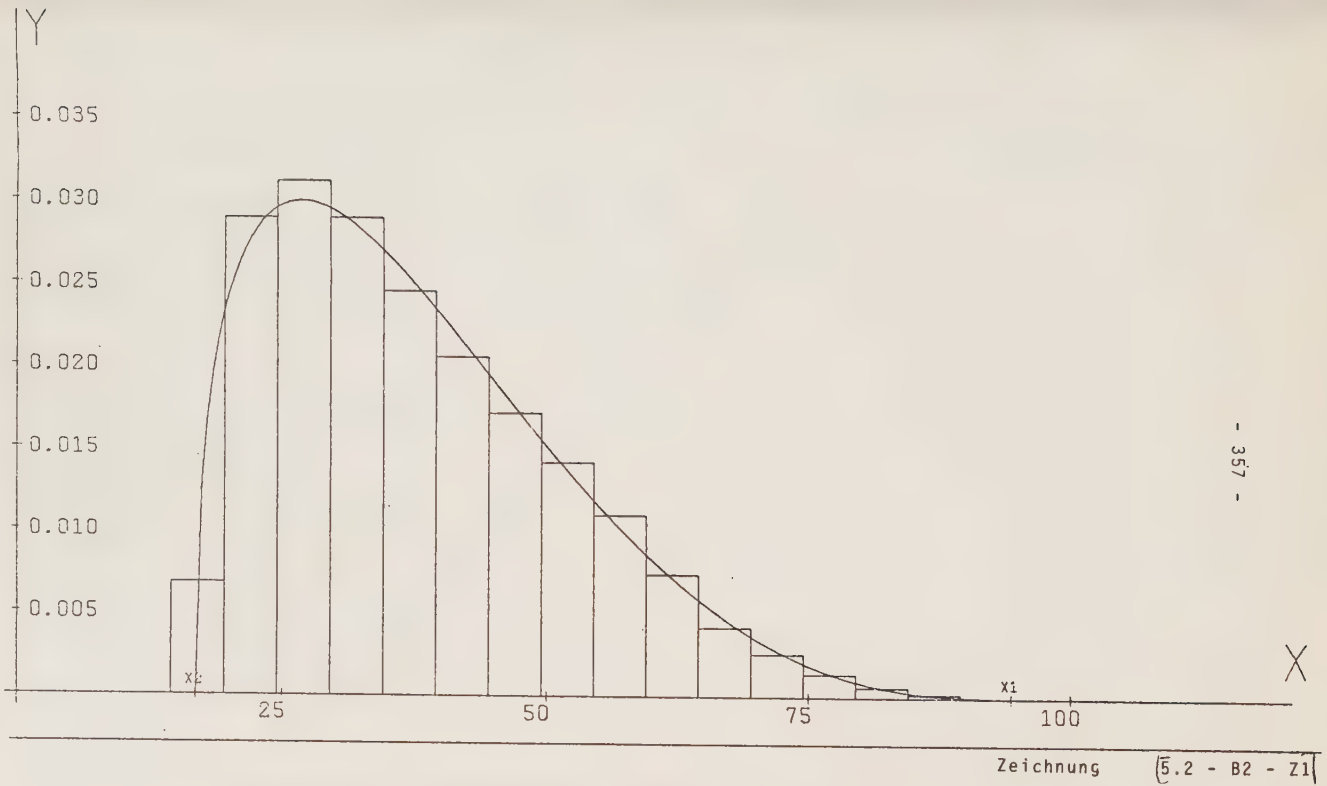
BEITRAEGE DER EINZELNEN KLASSEN ZUM X-0-QUADRAT-WERT

X(/ 0/)= -1.68838435961'+000
X-0-QU(/ 1/)= 1.77391063736'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -2.54617238510'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -2.54617238511'-003
X(/ 1/)= -1.32762567303'+000
X-0-QU(/ 2/)= 2.40078096272'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 1.85381400958'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 1.85381400958'-003
X(/ 2/)= -9.66306986508'-001
X-0-QU(/ 3/)= 6.55863266520'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 3.16604141425'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 3.16604141425'-003
X(/ 3/)= -6.05108299962'-001
X-0-QU(/ 4/)= 2.14154458993'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 1.75149382930'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 1.75149382930'-003
X(/ 4/)= -2.43849613420'-001
X-0-QU(/ 5/)= 9.83601145963'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -3.52778793592'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -3.52778793592'-003
X(/ 5/)= 1.17409073126'-001
X-0-QU(/ 6/)= 1.55296466201'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -4.07784388773'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -4.07784388767'-003
X(/ 6/)= 4.78667759671'-001
X-0-QU(/ 7/)= 1.59551267504'-002 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= -1.17938890960'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= -1.17938890961'-003
X(/ 7/)= 8.39826446217'-001
X-0-QU(/ 8/)= 1.15962027368'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 2.81197817437'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 2.81197817438'-003
X(/ 8/)= 1.20118513278'+000
X-0-QU(/ 9/)= 3.21073906904'-001 WOBEI H(EMP)-H(THEOR)= 4.04479739629'+000 SOWIE P(EMP)-P(THEOR)= 4.04479739632'-003
X(/ 9/)= 1.56244381930'+000

```
X-0-QU(/  10/)=  2,70046042734'-002     WOBEI  H(EMP)-H(THEOR)=  9,86175421625'-001     SOWIE  P(EMP)-P(THEOR)=  9,86175421630'-004
X(/   10/)=  1,92376250568'+000
X-0-QU(/  11/)=  3,01409749507'-001     WOBEI  H(EMP)-H(THEOR)= -2,67108514346'+000     SOWIE  P(EMP)-P(THEOR)= -2,67108514346'-003
X(/   11/)=  2,28406119240'+000
X-0-QU(/  12/)=  7,95333503297'-002     WOBEI  H(EMP)-H(THEOR)= -1,05736949801'+000     SOWIE  P(EMP)-P(THEOR)= -1,05736949801'-003
X(/   12/)=  2,64621987892'+000
X-0-QU(/  13/)=  1,93908750655'-002     WOBEI  H(EMP)-H(THEOR)=  4,52250042581'-001     SOWIE  P(EMP)-P(THEOR)=  4,52250042585'-004
X(/   15/)=  3,72999593860'+000

ZAHL DER VORZEICHENWECHSEL=    5

STICHPROBENUMFANG =    1000
ZAHL DER KLASSEN  =   13
ZAHL DER FREIHEITSGRADE =   8

  X-0-QUADRAT=  1,42238779395'+000

CHI-QUADRAT ( 95 ) =  1,55100000000'+001

CHI-QUADRAT ( 99 ) =  2,00899999999'+001

CHI-QUADRAT (99,9) =  2,61299999999'+001

DIE HYPOTHESE WIRD ANGENOMMEN.


DABEI.....

INTERVALLWAHRSCHEINLICHKEITEN P(I) UND -HAEUFIGKEITEN H(I)

P1(/   1/)=  3,65461723854'-002     H(/   1/)=  3,65461723851'+001
P1(/   2/)=  1,43146185990'-001     H(/   2/)=  1,43146185990'+002
P1(/   3/)=  1,52833958586'-001     H(/   3/)=  1,52833958586'+002
P1(/   4/)=  1,43248506171'-001     H(/   4/)=  1,43248506171'+002
P1(/   5/)=  1,26527787936'-001     H(/   5/)=  1,26527787936'+002
P1(/   6/)=  1,07077843888'-001     H(/   6/)=  1,07077843888'+002
P1(/   7/)=  8,71793889091'-002     H(/   7/)=  8,71793889096'+001
P1(/   8/)=  6,81880218253'-002     H(/   8/)=  6,81880218256'+001
P1(/   9/)=  5,09552026035'-002     H(/   9/)=  5,09552026037'+001
P1(/  10/)=  3,80138245781'-002     H(/  10/)=  3,80138245784'+001
P1(/  11/)=  2,36710851439'-002     H(/  11/)=  2,36710851435'+001
P1(/  12/)=  1,40573694980'-002     H(/  12/)=  1,40573694980'+001
P1(/  13/)=  7,14996187116'-003     H(/  13/)=  7,14996187115'+000
P1(/  14/)=  2,77757090440'-003     H(/  14/)=  2,77757090441'+000
P1(/  15/)=  6,00629637432'-004     H(/  15/)=  6,00629637433'-001
```

ZUSAETZLICH BEIM CHI-QUADRATTEST BERUECKSICHTIGTE RANDWAHRSCHEINLICHKEITEN.....

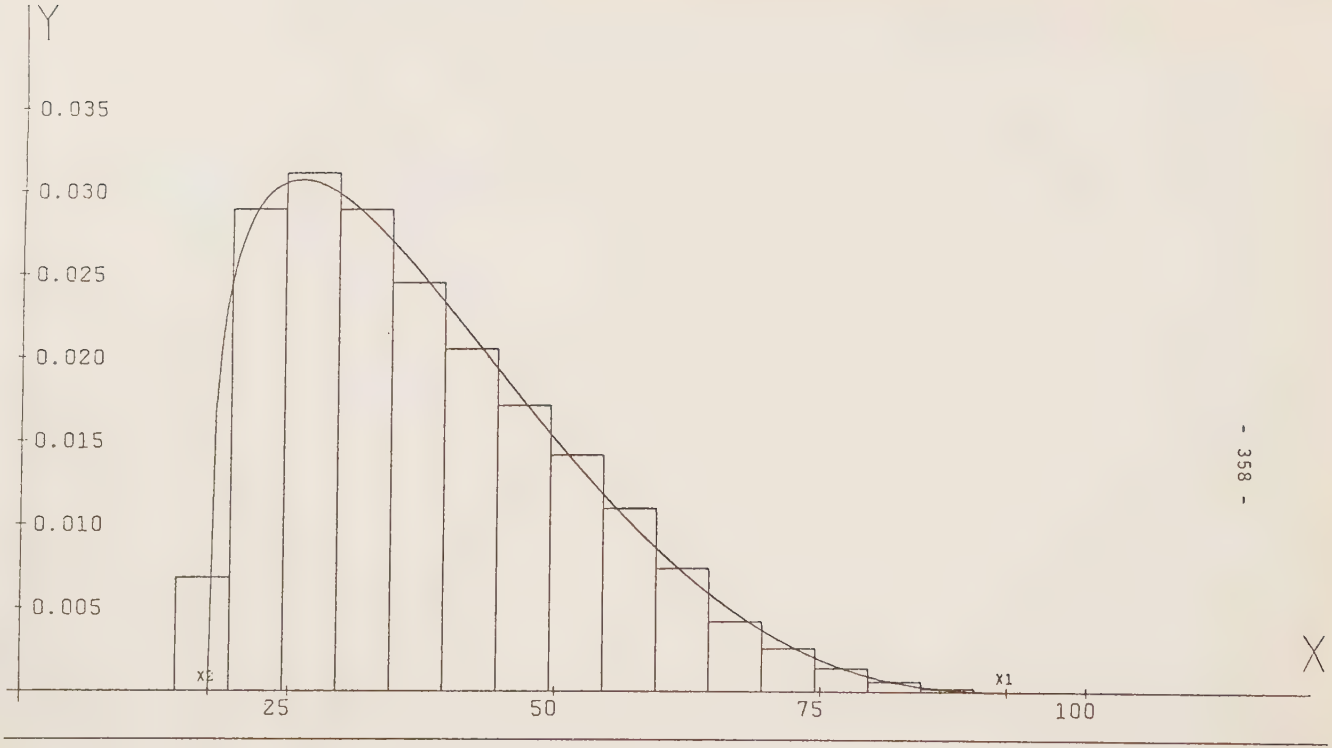
P1(/ 16/)= 1.95875444495'-005



Zeichnung 5.2 - B2 - Z1

KRANKHEITSRISIKØ (NACH ALTERSGRUPPEN)

1. APPRØXIMATIØNSSCHRITT, 2. VARIANTE



Zeichnung [5.2 - B2 - Z2]

KRANKHEITSRISIKØ (NACH ALTERSGRUPPEN)

6. APPRØXIMATIØNSSCHRITT, 2. VARIANTE

BEISPIEL [5.2 - B 3] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathcal{Z}$) :

Verteilung (in Promille) von Arbeiterinnen aus dem Bereich der gesamten Industrie aus dem Jahre 1972 in Frankreich nach der Höhe ihres Brutto-Monatsverdienstes (FFR-Klassen)

Quelle : [28] , Band 37, S. 104 * f

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : FFR

Stichprobenumfang (n) : 999

Zahl der Klassen (s) von $\mathcal{Z}$: 10

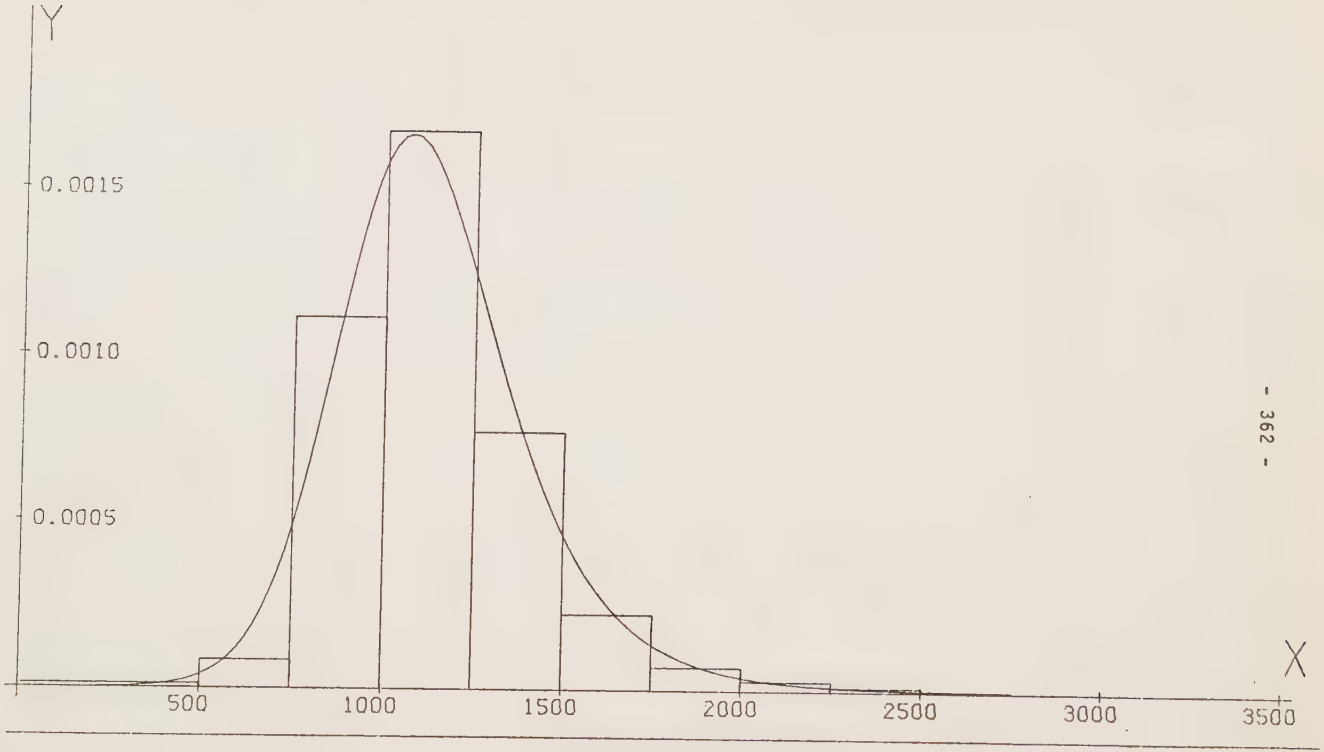
Klassengrenzen (x_i) von $\mathcal{Z}$: $x_0 = 0$, $x_1 = 500$, $x_2 = 750$, $x_3 = 1000$, ..., $x_{10} = 2500$, $x_{11} = 2750$

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathcal{Z}$ (Zerlegung $\tilde{\mathcal{F}}$) :
$n_1 = 100$, $n_2 = 84$, $N_3 = 84$, ..., $n_{10} = 84$

Bemerkungen :

	Approximationsschritt				
	k = 1	k = 2	k = 3	k = 7	k = 8
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	1.140,77	1.140,10	1.141,10	1.141,13	1.141,13
Standardabweichung ($\sigma = \sqrt{\mu_2}$)	276,67	267,23	265,86	265,30	265,29
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	$8{,}88_{10}{}^{-1}$	1,03	1,07	1,09	1,10
PEARSONscher Koeffizient β_1 ($= \mu_3^{*2}$)	$7{,}89_{10}{}^{-1}$	1,06	1,15	1,20	1,20
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	5,75	5,87	5,89	5,89	5,89
PEARSONscher Koeffizient $\varkappa$	0,23	0,40	0,48	0,54	0,54
PEARSON-Typ	II	II	II	II	II
Zugehörige Parameterwerte :					
In Falle von Typ I / Typ II / Typ III					
x_2 / r / x_2	796,58	667,04	600,67	551,37	550,58
x_1 / q / x_1	621,94	582,94	561,39	542,42	542,09
s_2 / s / s_2	4,80	5,45	5,80	6,06	6,07
s_1 / ν / s_1	- 4,21	- 7,24	- 9,23	- 11,01	- 11,04
y^* / y^* / y^*	$4{,}52_{10}{}^{23}$	$2{,}62_{10}{}^{26}$	$4{,}45_{10}{}^{27}$	$2{,}81_{10}{}^{28}$	$2{,}88_{10}{}^{28}$
Bemerkungen :					

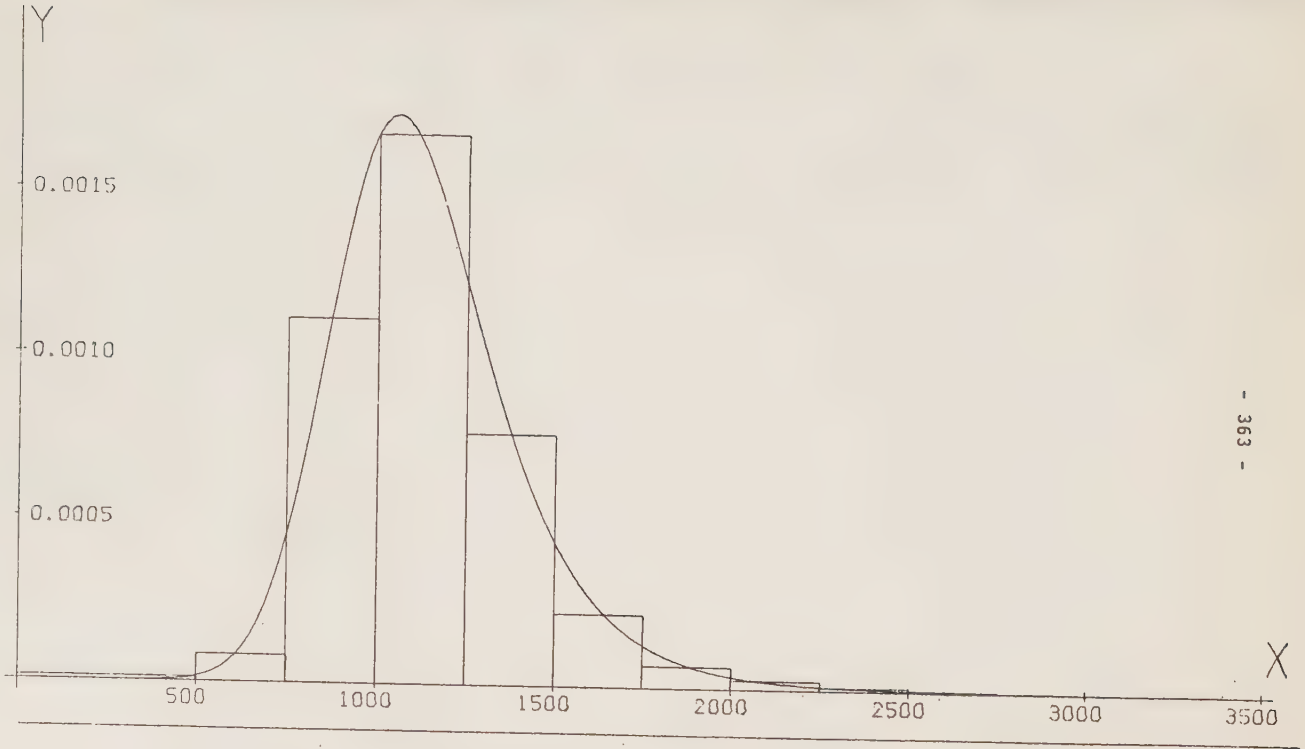
Intervall i	Emp. Häufigk h_i	Approximationsschritt k = 1		k = 2		k = 3		k = 7		k = 8	
		$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$
1	6	3,3	11,20	0,9	3,23	0,5	1,63	0,3	0,91	0,3	0,91
2	21	47,5		37,2		34,0		32,1		32,1	
3	278	264,2	0,72	277,4	$1,36_{10}{}^{-3}$	282,8	$8,24_{10}{}^{-2}$	286,4	0,25	286,4	0,25
4	418	385,9	2,67	394,6	1,38	394,9	1,35	394,5	1,40	394,4	1,40
5	192	204,1	0,72	198,4	0,21	196,2	$9,17_{10}{}^{-2}$	194,9	$4,45_{10}{}^{-2}$	194,9	$4,39_{10}{}^{-2}$
6	56	66,4	1,63	64,0	0,99	63,8	0,94	63,8	0,94	63,8	0,94
7	17	19,0	0,22	18,4	0,11	18,6	0,13	18,7	0,16	18,7	0,16
8	7	5,6	1,07	5,4	1,37	5,5	1,28	5,6	1,21	5,6	1,21
9	3	1,8		1,7		1,7		1,8		1,8	
10	1	0,6		0,6		0,6		0,6		0,6	
$\sum$			18,24		7,29		5,51		4,91		4,90
Zahl der Freiheitsgrade (F.G.)			2		2		2		2		2
χ^2 (α=0,05; F.G.)			5,99		5,99		5,99		5,99		5,99



Zeichnung [5.2 - B3 - Z1]

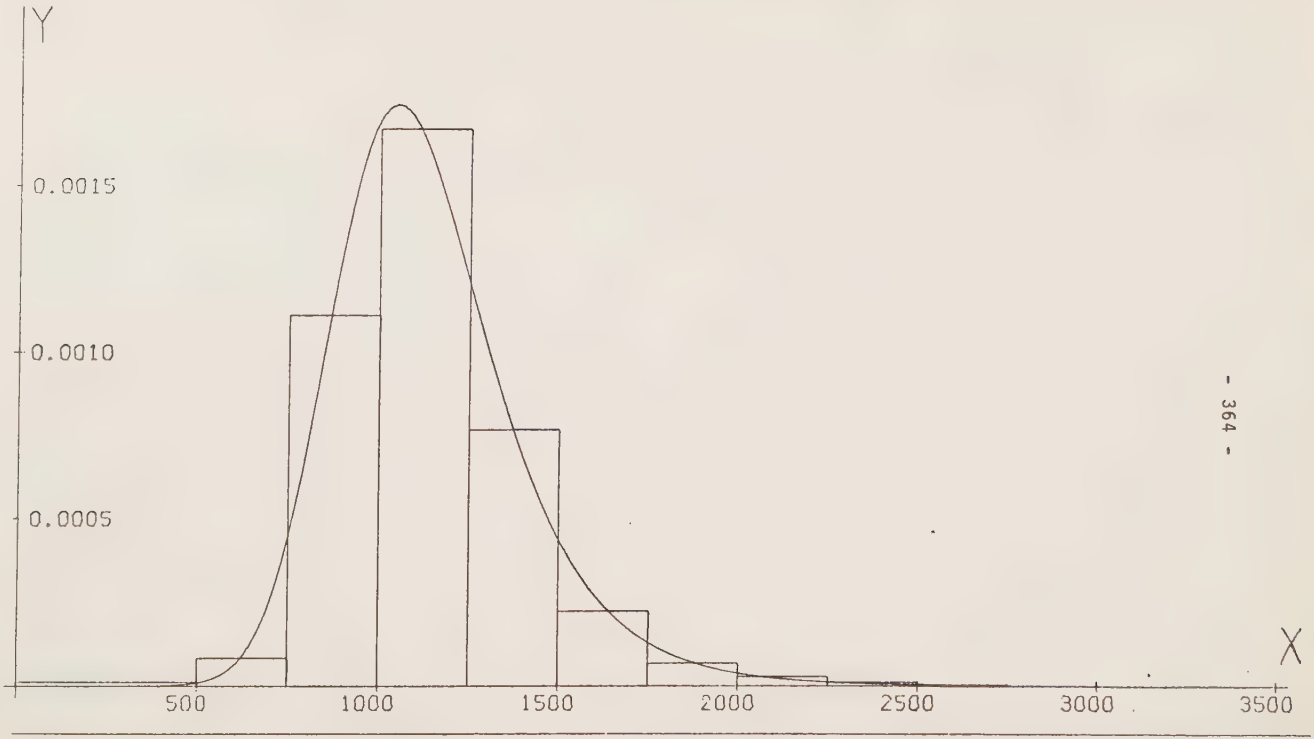
EG-ERH. LOEHNE 72, FRANKR.,GES. INDUSTR.

ARBEITERINNEN,BRUTTOMONATSVERD., 1.APPR.



Zeichnung [5.2 - B3 - Z2]

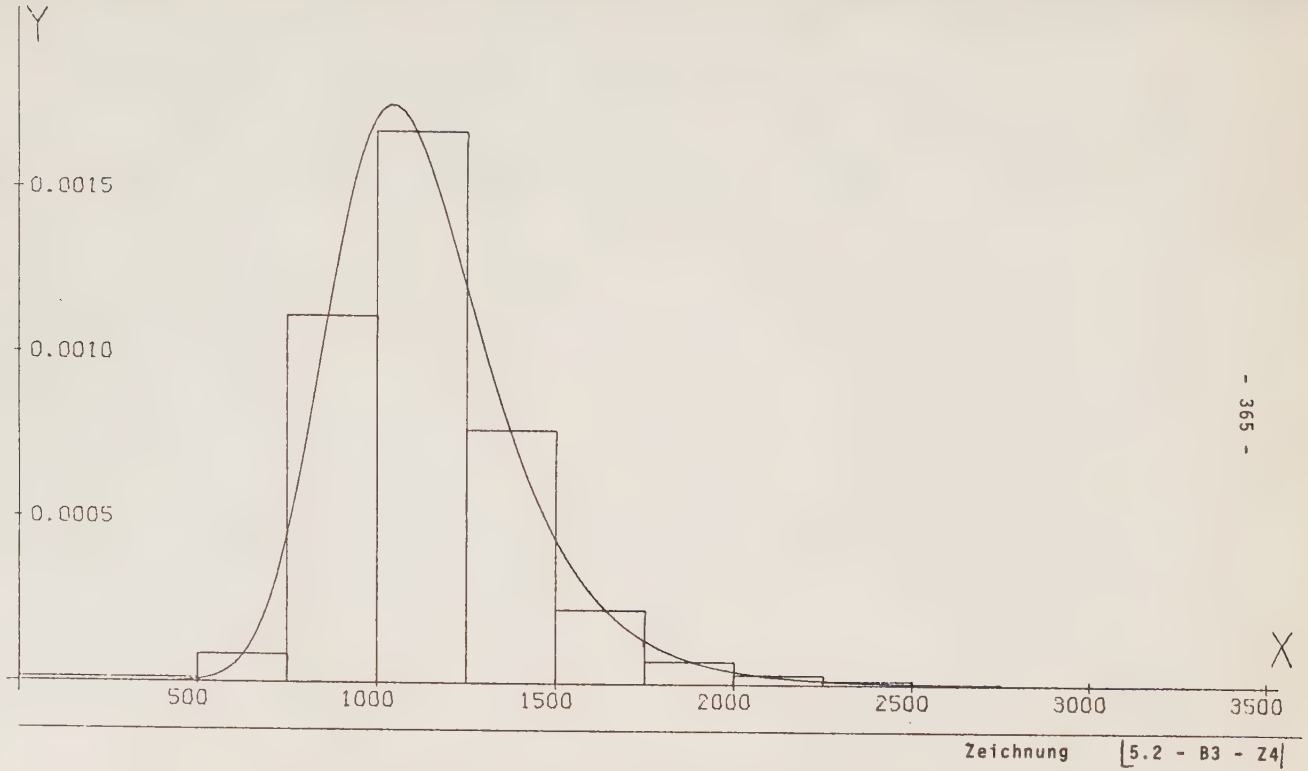
EG-ERH. LØEHNE 72, FRANKR.,GES. INDUSTR.
ARBEITERINNEN,BRUTTØMONATSVERD., 2.APPR.



Zeichnung [5.2 - B3 - Z3]

EG-ERH. LOEHNE 72, FRANKR.,GES. INDUSTR.

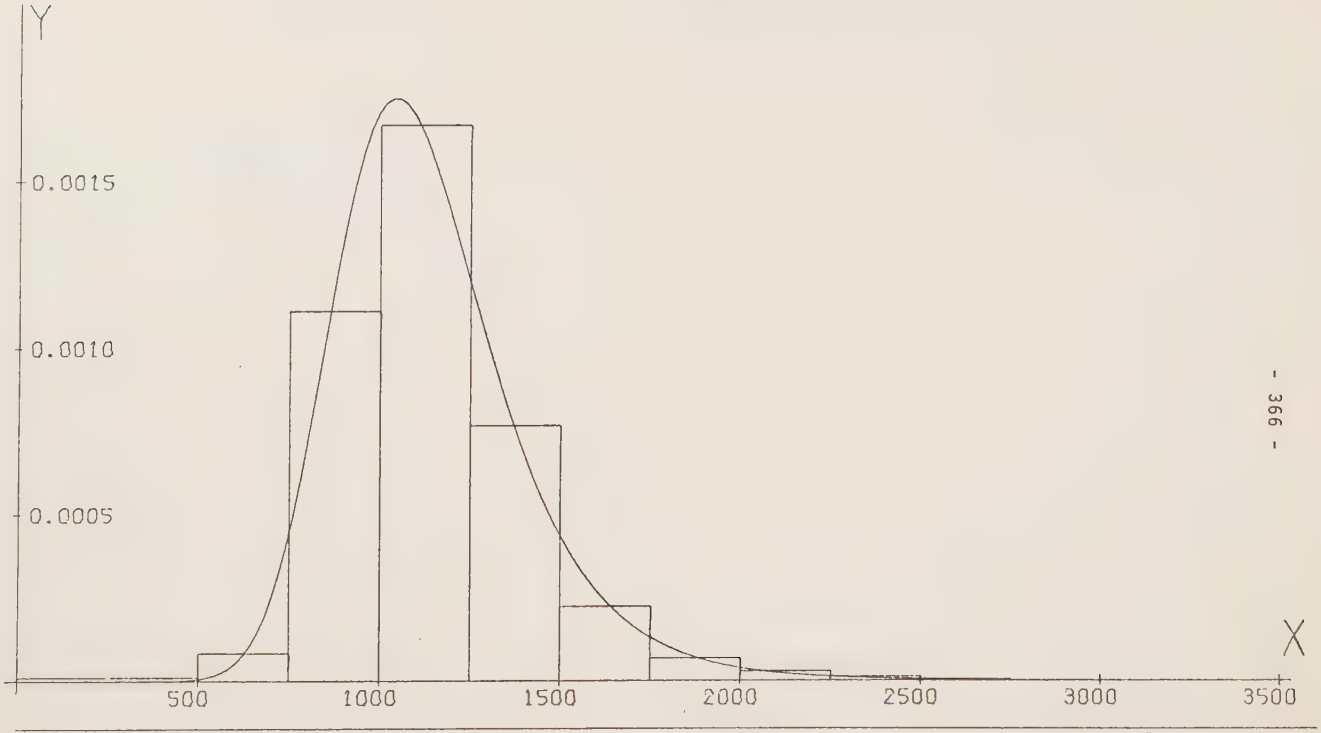
ARBEITERINNEN,BRUTTOMONATSVERD., 3.APPR.



Zeichnung 5.2 - B3 - Z4

EG-ERH. LOEHNE 72, FRANKR., GES. INDUSTR.

ARBEITERINNEN, BRUTTOMONATSVERD., 7. APPR.



Zeichnung [5.2 - B3 - Z5]

EG-ERH. LØEHNE 72, FRANKR.,GES. INDUSTR.

ARBEITERINNEN,BRUTTØMONATSVERD., 8.APPR.

BEISPIEL [5.2 - B 4] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathcal{G}$) :
Verteilung von männlichen Arbeitern der Elektrotechnik in Frankreich im Jahre 1972 nach der Höhe ihres Brutto-Stundenverdienstes (FFR-Klassen)

Quelle : [28] , Band 3 A, S. 68* f

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : FFR

Stichprobenumfang (n) : 984

Zahl der Klassen (s) von $\mathcal{G}$: 27

Klassengrenzen (x_i) von $\mathcal{G}$:

$x_0 = 0$ [1], $x_1 = 4$, $x_2 = 4{,}5$, $x_3 = 5$, ..., $x_{25} = 16$, $x_{26} = 16{,}5$, $x_{27} = 25$ [1]

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathcal{G}$ (Zerlegung $\tilde{\mathcal{F}}$) :

$n_1 = 100$, $n_2 = 24$, $n_3 = 24$, ..., $n_{26} = 24$, $n_{27} = 100$

Bemerkungen :

---

1) angenommene Werte

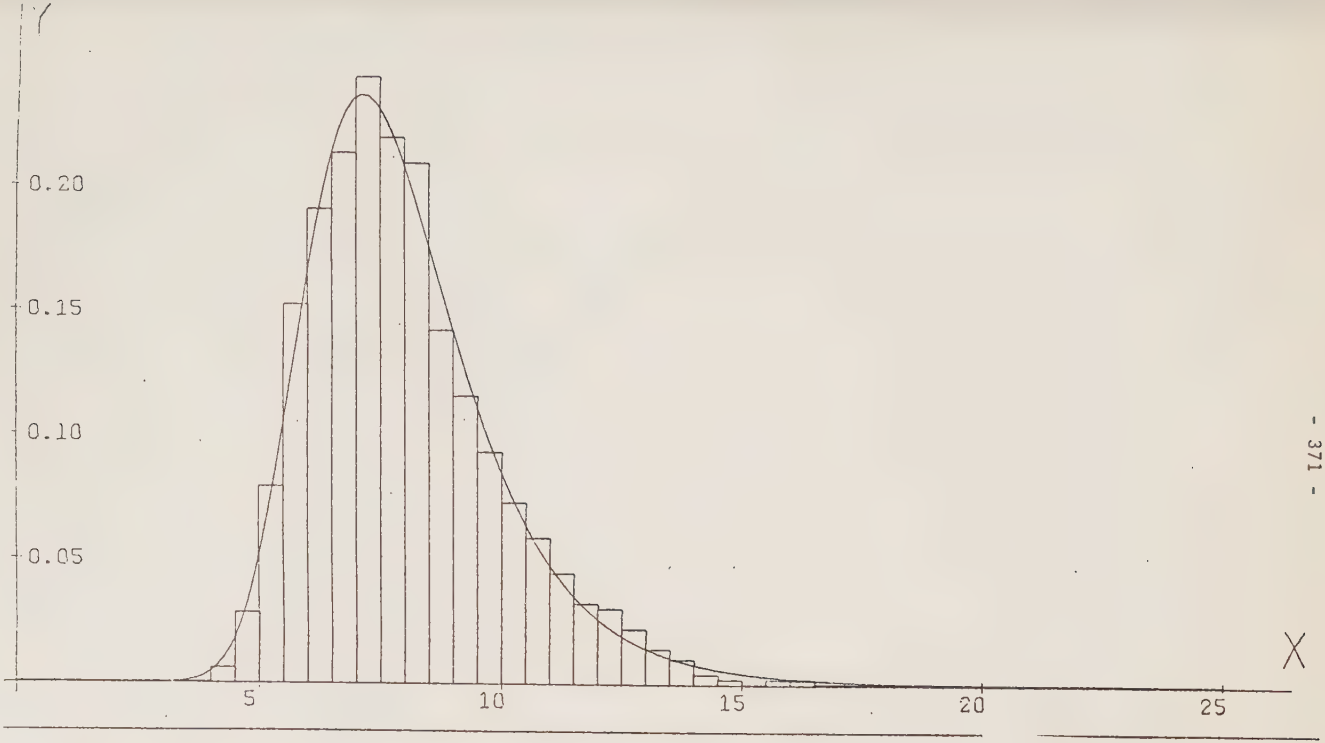
	Approximationsschritt				
	k = 1	(k = 2)	k = 6		
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	8,03	8,02	8,02		
Standardabweichung ($\sigma = \sqrt{\mu_2}$)	2,06	2,01	2,01		
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	1,36	1,18	1,14		
PEARSONscher Koeffizient β_1 ($= \mu_3^{*2}$)	1,86	1,38	1,29		
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	7,34	5,74	5,38		
PEARSONscher Koeffizient $\varkappa$	0,67	1,05	1,45		
PEARSON-Typ	II	III (R)	III (R)		
Zugehörige Parameterwerte :					
In Falle von Typ I / Typ II / Typ III					
x_2 / r / x_2	3,37	- 1,33	- 8,77		
x_1 / q / x_1	3,28	1,93	3,24		
s_2 / s / s_2	5,35	- 44,11	- 30,23		
s_1 / ϑ / s_1	-12,25	27,06	73,17		
y^* / y^* / y^*	178,94	$7,43_{10}15$	$2,32_{10}31$		
Bemerkungen :					

Intervall i	Emp. Häufigk h_i	Approximationsschritt k = 1		(k = 2)		k = 6					
		$n \cdot \tilde{\pi}(k),i$	$X^2(k),i$	$n \cdot \tilde{\pi}(k),i$	$X^2(k),i$	$n \cdot \tilde{\pi}(k),i$	$X^2(k),i$	$n \cdot \tilde{\pi}(k),i$	$X^2(k),i$	$n \cdot \tilde{\pi}(k),i$	$X^2(k),i$
1	1	1,5		0,4		0,1					
2	3	5,2	1,13	3,8	0,25	2,9	$1,51_{10}-2$				
3	14	16,4		16,0		15,5					
4	39	37,9	$3,24_{10}-2$	39,7	$1,21_{10}-2$	40,8	$7,73_{10}-2$				
5	75	66,8	1,01	69,5	0,44	71,3	0,19				
6	94	94,3	$8,89_{10}-4$	95,6	$2,58_{10}-2$	96,8	$7,92_{10}-2$				
7	105	111,7	0,41	110,9	0,31	110,9	0,31				
8	120	115,8	0,15	113,8	0,34	112,8	0,45				
9	108	108,6	$3,88_{10}-3$	106,7	$1,66_{10}-2$	105,5	$6,02_{10}-2$				
10	103	94,6	0,74	93,6	0,95	92,6	1,17				
11	70	78,1	0,85	78,1	0,83	77,5	0,73				
12	57	62,1	0,41	62,7	0,52	62,6	0,50				
13	46	48,0	$8,18_{10}-2$	49,0	0,18	49,1	0,20				
14	36	36,4	$4,44_{10}-3$	37,5	$5,85_{10}-2$	37,8	$8,32_{10}-2$				
15	29	27,3	0,11	28,2	$2,17_{10}-2$	28,6	$6,84_{10}-3$				
16	22	20,3	0,15	21,0	$4,80_{10}-2$	21,3	$2,19_{10}-2$				
17	16	15,0	$6,52_{10}-2$	15,5	$1,66_{10}-2$	15,8	$3,76_{10}-3$				
18	15	11,1	1,38	11,4	1,16	11,6	1,02				
19	11	8,2	0,96	8,3	0,88	8,4	0,78				
20	7	6,1	1,42	6,1	0,15	6,1	0,12				

Fortsetzung

(Zu BEISPIEL [5.2 - B 4])

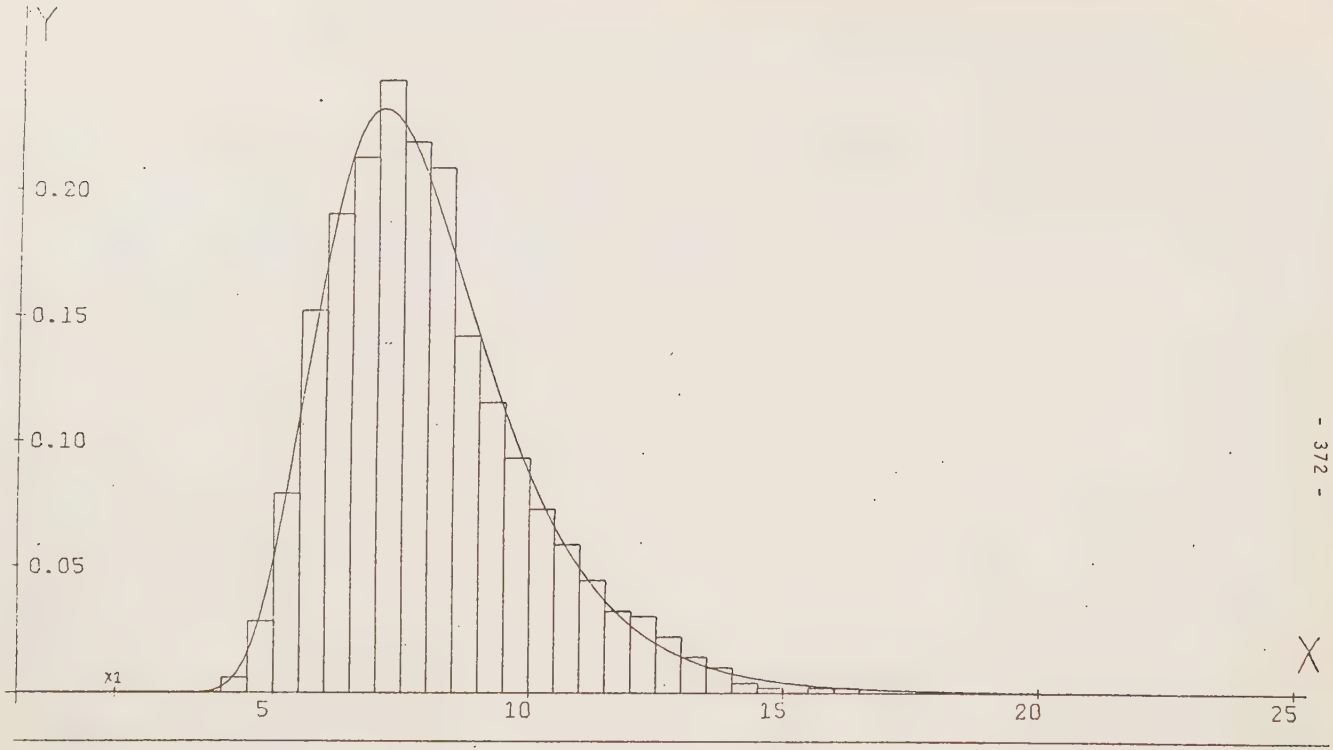
Intervall i	Emp. Häufigk h_i	Approximationsschritt k = 1		(k = 2)		k = 6					
		$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$
21	5	4,5	$9,49_{10}{}^{-2}$	4,4		4,4					
22	2	3,4		3,2		3,2					
23	1	2,5		2,3		2,3					
24	0	1,9	1,96	1,7	0,72	1,7	0,60				
25	1	1,4		1,2		1,2					
26	1	1,1		0,9		0,9					
27	3	3,6		2,6		2,3					
Σ			9,67		6,94		6,42				
Zahl der Freiheitsgrade (F.G.)			15		14		14				
χ^2 (α= 0,05; F.G.)			25,00		23,68		23,68				



Zeichnung [5.2 - B4 - Z1]

EG-ERHEBUNG LOEHNE 1972, FRANKR, ARBEITER

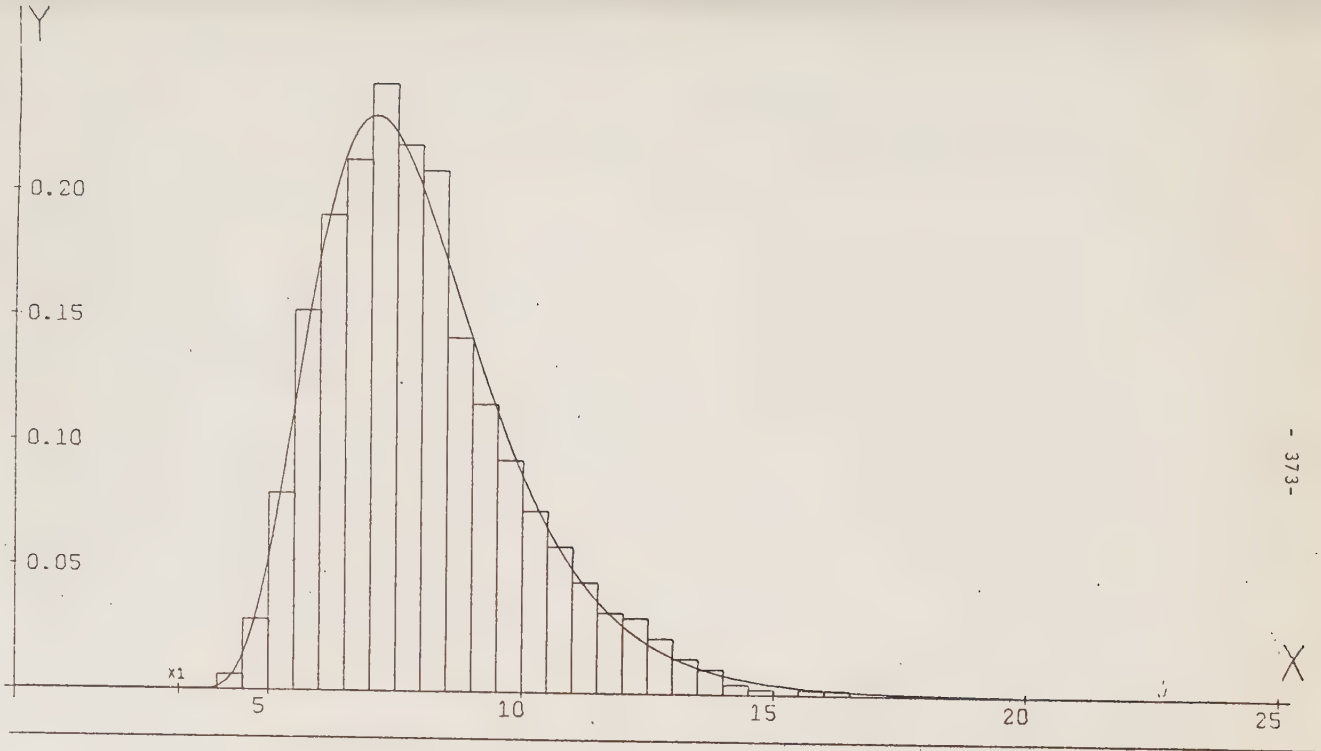
STD-LOEHNE, E-TECHNIK, MAENNER, 1. SCHR.



Zeichnung [5.2 - B4 - Z2]

EG-ERHEBUNG LØEHNE 1972, FRANKR, ARBEITER

STD-LØEHNE, E-TECHNIK, MAENNER, 2. SCHR.



Zeichnung [5.2 - B4 - Z3]

EG-ERHEBUNG LOEHNE 1972, FRANKR, ARBEITER

STD-LOEHNE, E-TECHNIK, MAENNER, 6. SCHR.

BEISPIEL [5.2 - B 5] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathfrak{g}$) :

Verteilung geschätzter Bewölkungsintensitäten in Greenwich im Monat Juli in den Jahren 1890 - 1904 (ohne 1901) nach einer Skala mit Werten von 0 bis 10

Quelle : [3], I, S. 10 und 19

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : (Bewölkungsgrad)

Stichprobenumfang (n) : 1715

Zahl der Klassen (s) von $\mathfrak{g}$: 11

Klassengrenzen (x_i) von $\mathfrak{g}$:

$x_0 = -0{,}5$, $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1{,}5$, ..., $x_{11} = 10{,}5$

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathfrak{g}$ (Zerlegung $\mathfrak{F}$) :

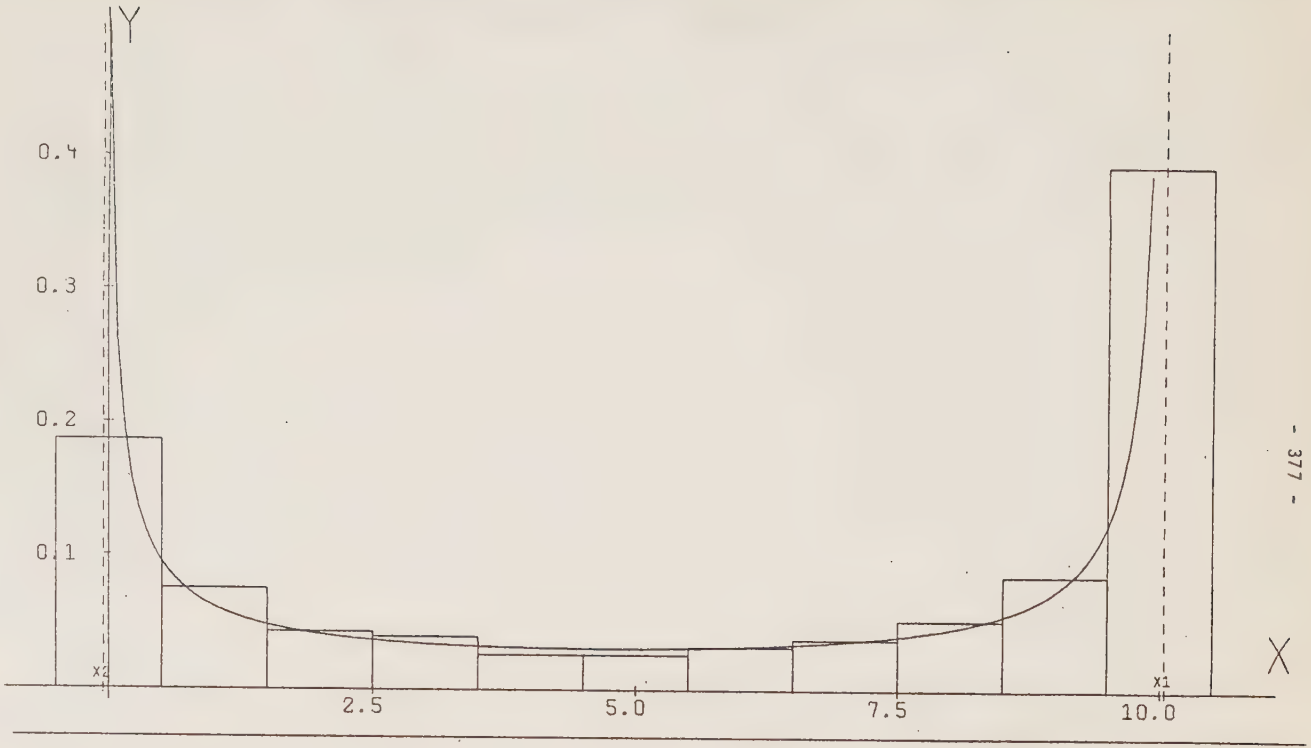
$n_1 = \ldots = n_{10} = 78$

Bemerkungen :

	Approximationsschritt				
	k = 1	k = 10	k = 15	k = 16	
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	6,11	6,09	6,08	6,08	
Standardabweichung ($\sigma = \sqrt{\mu_2}$)	4,13	4,04	4,02	4,02	
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	0,45	0,45	0,45	0,45	
PEARSONscher Koeffizient β_1 (= μ_3^{*2})	0,19	0,20	0,20	0,20	
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	1,46	1,44	1,43	1,43	
PEARSONscher Koeffizient æ	$-5,13_{10}-2$	$-5,27_{10}-2$	$-5,42_{10}-2$	$-5,43_{10}-2$	
PEARSON-Typ	I (U)	I (U)	I (U)	I (U)	
Zugehörige Parameterwerte :					
In Falle von Typ I / Typ II / Typ III					
x_2 / r / x_2	$-4,75_{10}-2$	0,16	0,19	0,19	
x_1 / q / x_1	10,04	9,89	9,84	9,84	
s_2 / s / s_2	$-7,46_{10}-1$	$-7,67_{10}-1$	$-7,71_{10}-1$	$-7,71_{10}-1$	
s_1 / ∂ / s_1	$-8,38_{10}-1$	$-8,54_{10}-1$	$-8,54_{10}-1$	$-8,54_{10}-1$	
y^* / y^* / y^*	$4,02_{10}-1$	$3,88_{10}-1$	$3,84_{10}-1$	$3,84_{10}-1$	
Bemerkungen :					

(Zu BEISPIEL [5.2 - B5])

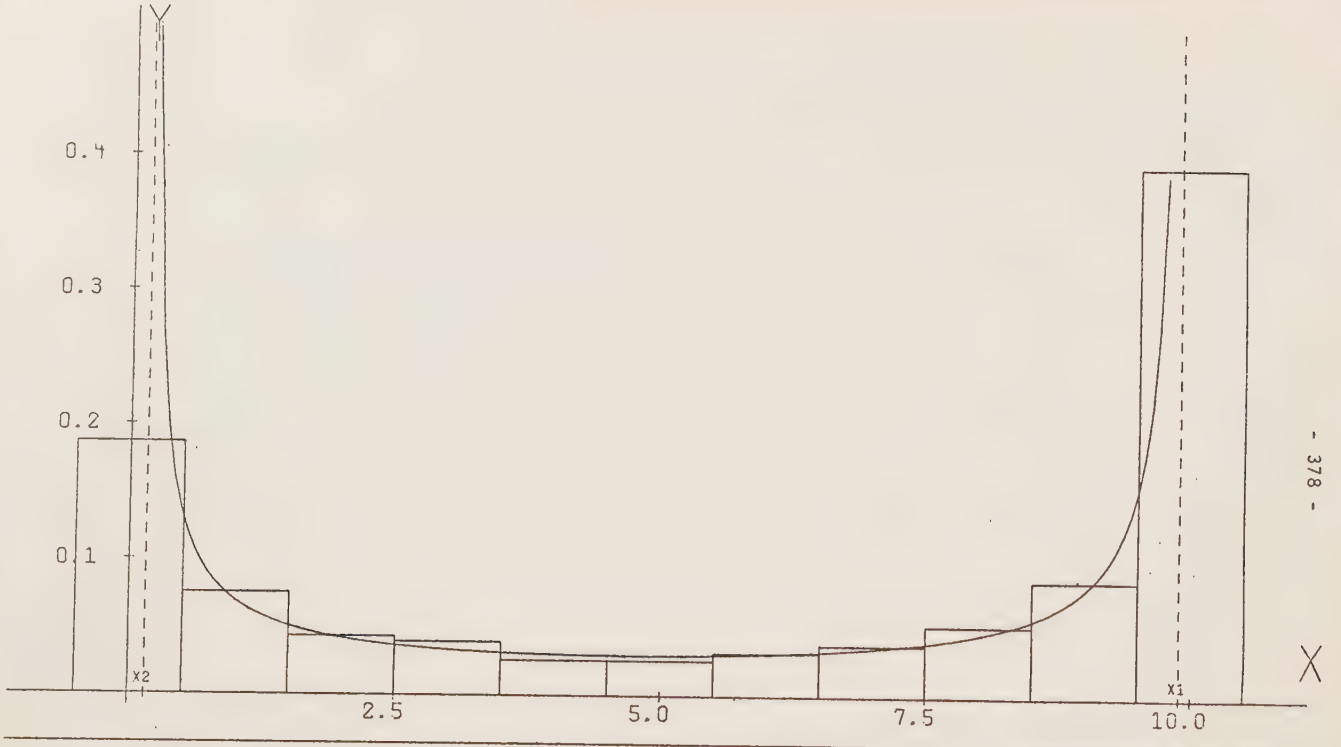
Intervall i	Emp. Häufigk h_i	Approximationsschritt k = 1		k = 10		k = 15		k 3 16			
		$n \cdot \tilde{\pi}(k),i$	$X^2(k),i$	$n \cdot \tilde{\pi}(k),i$	$X^2(k),i$	$n \cdot \tilde{\pi}(k),i$	$X^2(k),i$	$n \cdot \tilde{\pi}(k),i$	$X^2(k),i$	$n \cdot \tilde{\pi}(k),i$	$X^2(k),i$
1	320	337,3	0,88	321,2	$4,85_{10}$-3	317,5	$1,94_{10}$-2	317,0	$2,79_{10}$-2		
2	129	110,7	3,04	128,7	$9,19_{10}$-4	132,4	$8,96_{10}$-2	132,8	.0,11		
3	74	71,3	0,11	72,7	$2,17_{10}$-2	72,9	$1,77_{10}$-2	72,9	$1,74_{10}$-2		
4	68	58,8	1,43	58,0	1,71	57,8	1,80	57,8	1,81		
5	45	54,0	1,51	52,5	1,08	52,2	0,99	52,2	0,98		
6	45	53,3	1,30	51,5	0,82	51,1	0,74	51,1	0,73		
7	55	56,1	$2,15_{10}$-2	54,2	$1,12_{10}$-2	53,9	$2,22_{10}$-2	53,9	$2,34_{10}$-2		
8	65	63,6	$2,88_{10}$-2	62,0	0,14	61,9	0,16	61,8	0,16		
9	90	81,1	0,98	80,9	1,01	81,4	0,92	81,4	0,91		
10	148	136,7	0,93	150,7	$4,73_{10}$-2	157,0	0,51	157,5	0,58		
11	676	679,9	$2,23_{10}$-2	666,1	0,15	655,2	0,66	656,7	0,57		
$\sum$			10,23		5,00		5,93		5,92		
Zahl der Freiheitsgrade (F.G.)			6		6		6		6		
χ^2 (α= 0,05; F.G.)			12,59		12,59		12,59		12,59		



Zeichnung [5.2 - B5 - Z1]

BEWOELKUNGSINTENSITAET

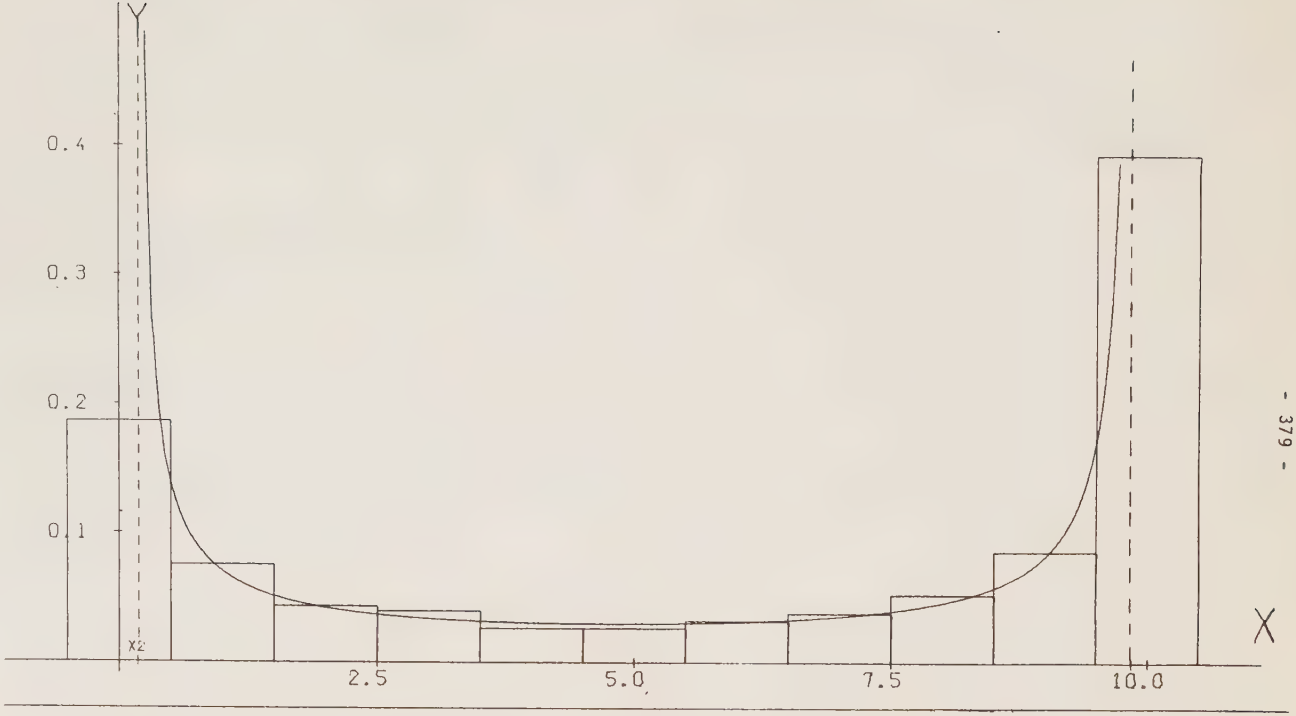
1. APPROX.-SCHRITT



Zeichnung [5.2 - B5 - Z2]

BEWØELKUNGSINTENSITAET

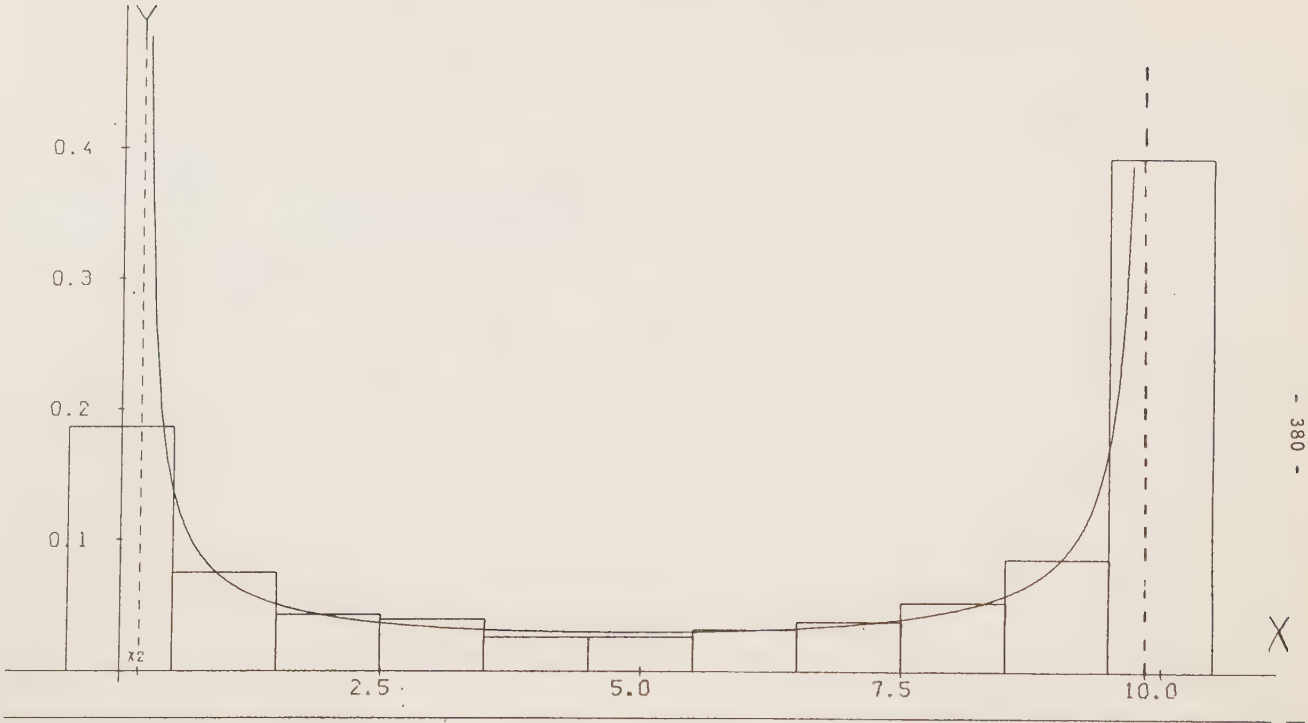
10. APPRØX.-SCHRITT



Zeichnung (5.2 - B5 - Z3)

BEWOELKUNGSINTENSITAET

15. APPROXIMATIONSSCHRITT



Zeichnung 5.2 - B5 - Z4

BEWOELKUNGSINTENSITAET

16. APPROXIMATIONSSCHRITT

BEISPIEL [5.2 - B 6] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathcal{G}$) :
Körpergrößenverteilung I; Verteilung männlicher Erwachsener aus dem Vereinigten Königreich nach ihrer Körpergröße (in inch)

Quelle : [3], 1, S. 8; dort angegebene urspr. Quelle: Final Report of the Anthropometric Committee to the British Association, 1883, p. 256

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : inch

Stichprobenumfang (n) : 8585

Zahl der Klassen (s) von $\mathcal{G}$: 21

Klassengrenzen (x_i) von $\mathcal{G}$:
$X_0 = 56{,}9375$, $X_1 = 57{,}9375$, ..., $X_{22} = 77{,}9375$

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathcal{G}$ (Zerlegung $\mathcal{F}$) :

$n_1 = \ldots = n_{21} = 30$

Bemerkungen :

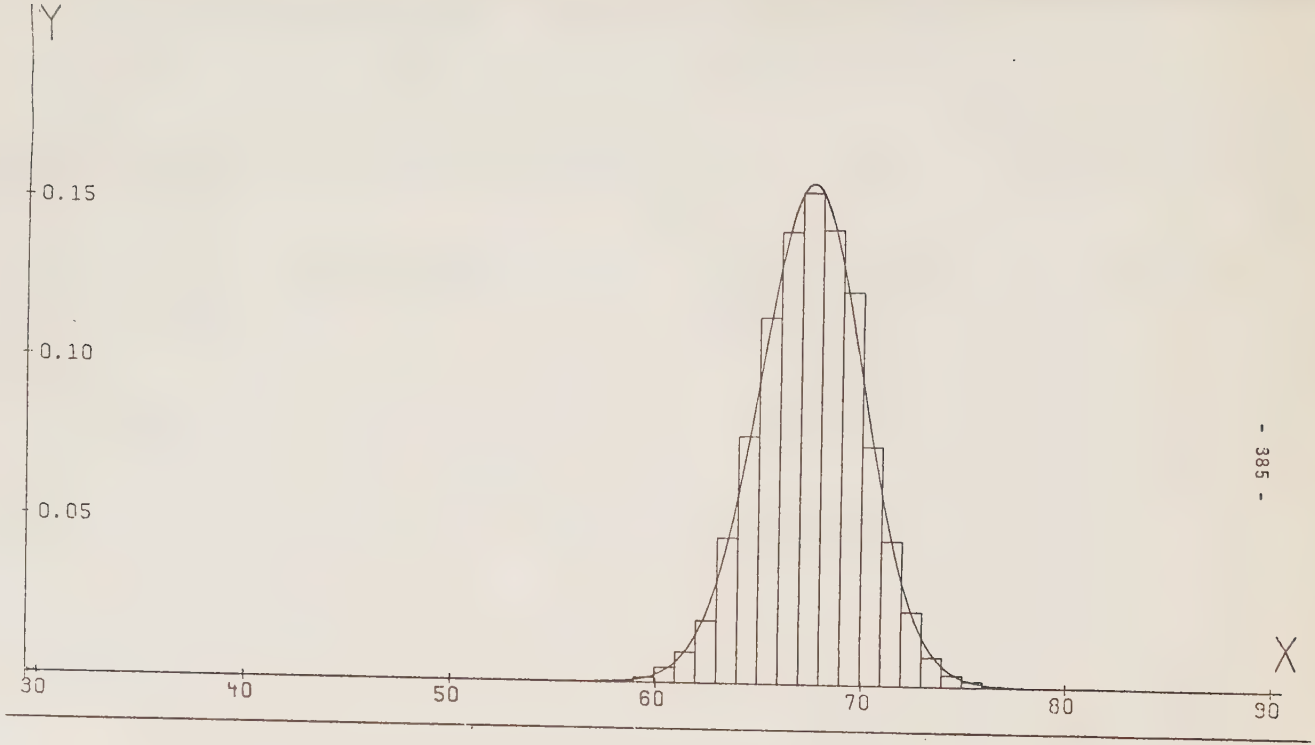
	Appromaxitionsschritt				
	k = 1	k = 3	k =	k =	k =
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	67,46	67,46			
Standardabweichung ($\sigma = \sqrt{\mu_2}$)	2,57	2,56			
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	$-1,22_{10}-2$	$-1,24_{10}-2$			
PEARSONscher Koeffizient β_1 ($= \mu_3^{*2}$)	$1,49_{10}-2$	$1,54_{10}-4$			
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	3,14	3,15			
PEARSONscher Koeffizient ε	$3,87_{10}-4$	$3,89_{10}-4$			
PEARSON-Typ	II	II			
Zugehörige Parameterwerte :					
In Falle von Typ I					
x_2	67,79	67,79			
x_1	16,96	16,64			
s_2	23,24	22,69			
s_1	0,87	0,86			
y^*	$2,18_{10}56$	$4,17_{10}54$			
Bemerkungen :					

Typ II	Typ III
r	x_2
q	x_1
s	s_2
p	s_1
y^*	y^*

Intervall i	Emp. Häufigk h_i	Approximationsschritt k = 1		k = 3		k =		k =		k =	
		$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$
1	2	1,5		1,4							
2	4	4,6	0,52	4,4	1,02						
3	14	13,4		12,9							
4	41	36,2		35,0							
5	83	89,0	0,41	86,7	0,16						
6	169	196,3	3,79	192,8	2,95						
7	394	383,3	0,30	379,5	0,55						
8	669	655,2	0,29	653,1	0,39						
9	990	970,4	0,39	972,5	0,32						
10	1223	1235,6	0,13	1242,3	0,30						
11	1329	1345,1	0,19	1354,1	0,46						
12	1230	1249,1	0,29	1256,1	0,54						
13	1063	990,2	5,35	992,6	4,99						
14	646	672,8	1,07	670,9	0,92						
15	392	394,4	$1,44_{10}-2$	390,6	$5,00_{10}-3$						
16	202	201,3	$2,33_{10}-3$	197,8	$8,93_{10}-2$						
17	79	90,5	1,46	88,1	0,95						
18	32	36,3		35,0							
19	16	13,1		12,6							
20	5	4,4	$2,43_{10}-4$	4,1	$7,45_{10}-2$						
21	2	1,3		1,3							

Fortsetzung (Zu BEISPIEL [5.2 - B6])

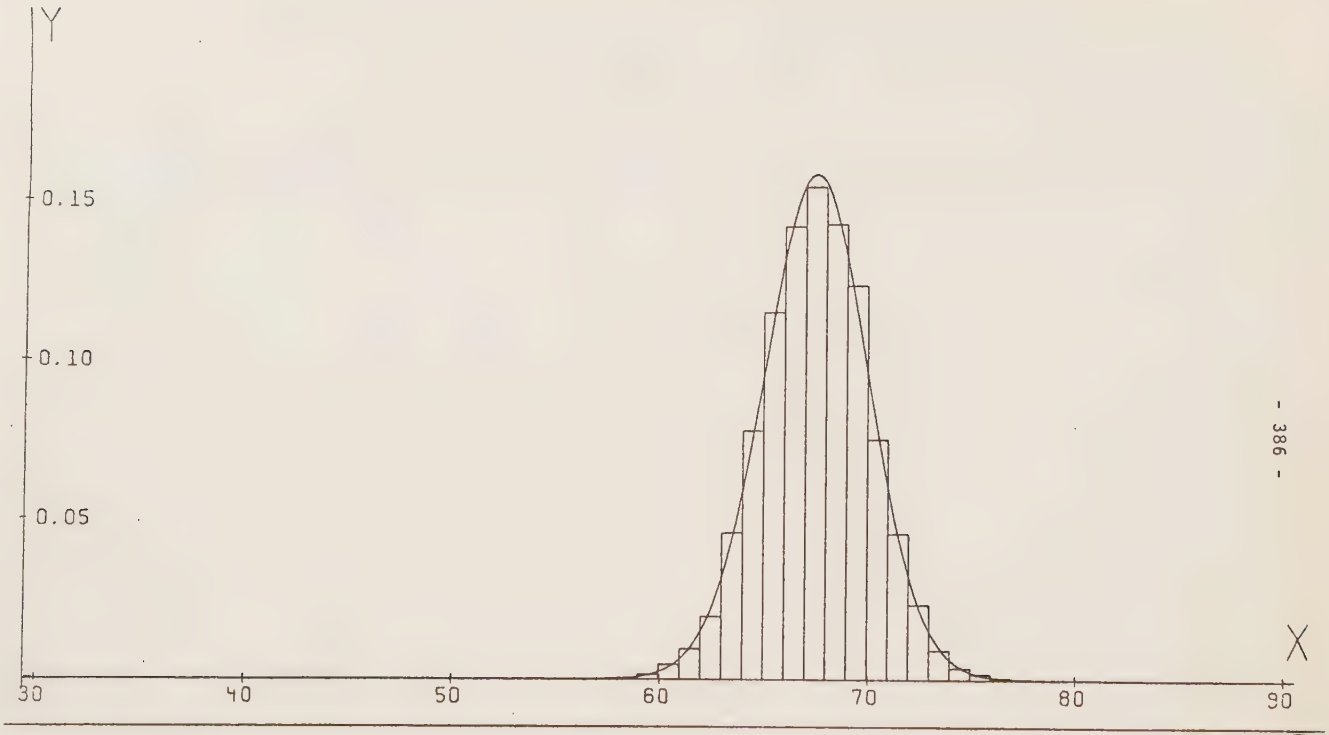
Intervall i	Emp. Häufigk h_i	Approximationsschritt k = 1		k = 3		k =		k =		k =	
		$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
$\geq$			14,20		13,73						
Zahl der Freiheitsgrade (F.G.)			10		10						
χ^2 (α=0,05;F.G.)			18,31		18,31						



Zeichnung [5.2 - B6 - Z1]

KOERPERGROESSENVERTEILUNG I

(INCH-KLASSEN), 1. APPROXIMATIONSSCHRITT



Zeichnung [5.2 - B6 - Z2]

KOERPERGROESSENVERTEILUNG I

(INCH-KLASSEN) 3. APPROXIMATIONSSCHRITT

BEISPIEL [5.2 - B 7] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathfrak{H}$) :

Körpergrößenverteilung II; Körpergrößenverteilung von 648 gesunden Männern (20 - 25 Jahre); (cm-Klassen)

Quelle : [25] , S. 204; dort angegebene ursprüngliche Quelle: RAUTMANN H., Untersuchungen der Norm, Jena 1921

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : cm

Stichprobenumfang (n) : 648

Zahl der Klassen (s) von $\mathfrak{H}$: 8

Klassengrenzen (x_i) von $\mathfrak{H}$:

$X_0 = 155{,}5,\ X_1 = 159{,}5,\ \ldots,\ X_8 = 187{,}5$

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathfrak{H}$ (Zerlegung $\mathfrak{F}$) :

$n_1 = \ldots = n_8 = 52$

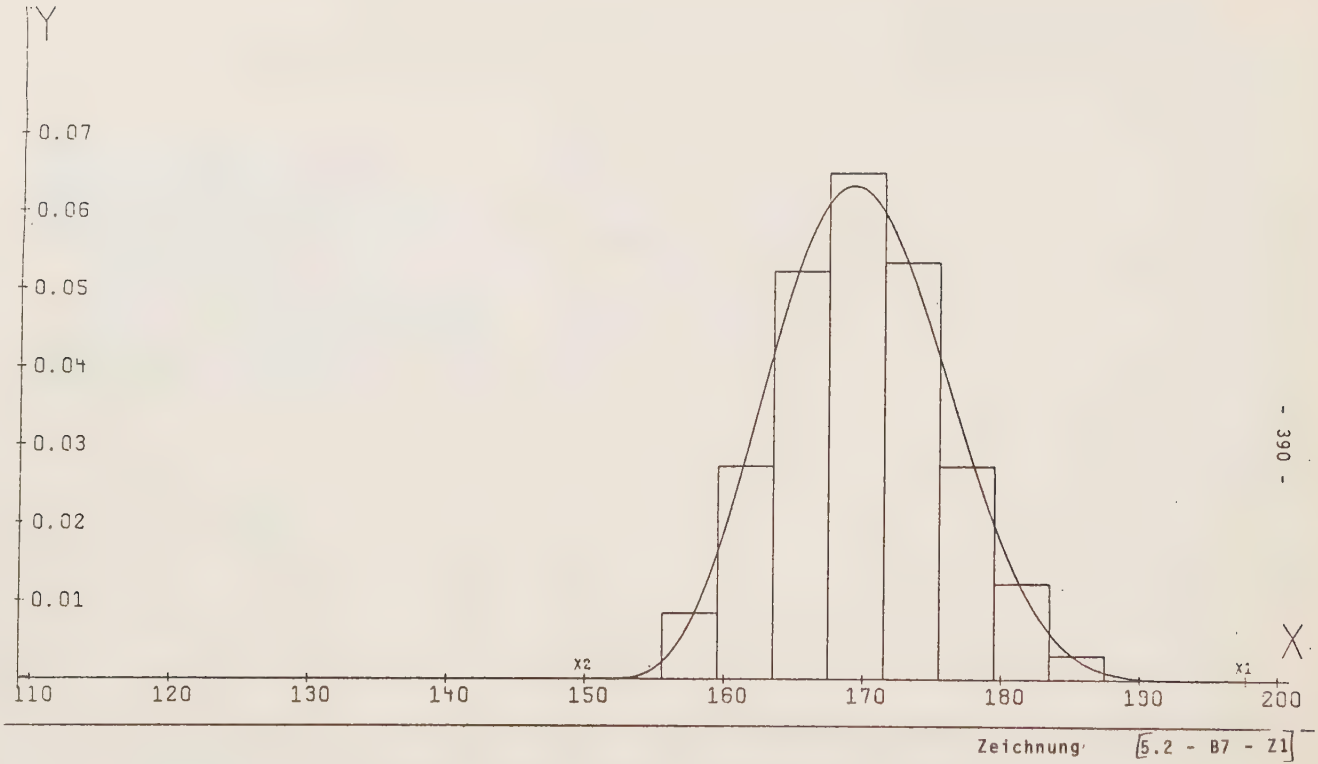
Bemerkungen :

	Approximationsschritt				
	k = 1	k = 5	k =	k =	k =
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	169,50	169,90			
Standardabweichung ($\sigma = \sqrt{\mu_2}$)	5,98	5,87			
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	$5,07_{10}-2$	$1,69_{10}-1$			
PEARSONscher Koeffizient β_1 ($= \mu_3^{*2}$)	$2,57_{10}-2$	$2,85_{10}-2$			
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	2,69	2,68			
PEARSONscher Koeffizient αe	$-2,81_{10}-2$	$-2,99_{10}-2$			
PEARSON-Typ	I	I			
Zugehörige Parameterwerte :					
In Falle von Typ I / Typ II / Typ III					
x_2 / r / x_2	150,00	150,90			
x_1 / q / x_1	197,70	196,71			
s_2 / s / s_2	5,03	4,71			
s_1 / ν / s_1	7,42	7,06			
y^* / y^* / y^*	$3,58_{10}-19$	$5,07_{10}-18$			
Bemerkungen :					

Intervall i	Emp. Häufigk h_i	Approximationsschritt k = 1		k = 5		k =		k =		k =	
		$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$
1	22	22 [1]	$9{,}64_{10}{}^{-6}$	19,6 [1]	0,29						
2	71	74,4	0,15	73,6	$9{,}42_{10}{}^{-2}$						
3	136	137,2	$1{,}12_{10}{}^{-2}$	139,1	$6{,}97_{10}{}^{-2}$						
4	169	162,3	0,27	165,0	$9{,}75_{10}{}^{-2}$						
5	139	134,2	0,18	135,4	$9{,}82_{10}{}^{-2}$						
6	71	78,5	0,72	78,0	0,62						
7	32	31,2		30,0							
8	8	8,2 [1]	$9{,}16_{10}{}^{-3}$	7,3 [1]	0,19						
Σ			1,35		1,46						
Zahl der Freiheitsgrade (F.G.)			2		2						
χ^2 (α = 0,05; F.G.)			5,99		5,99						

---

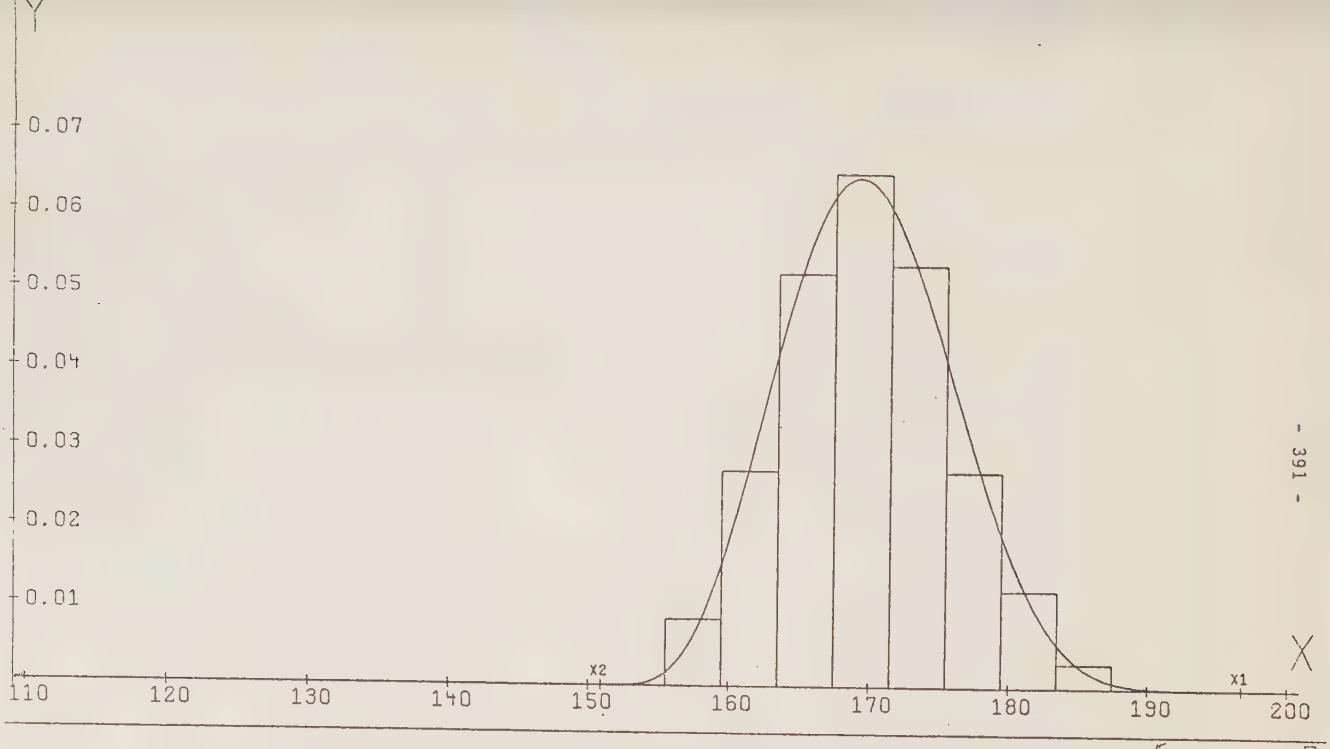
1) Einschließlich der sich in diesem Beispiel bemerkbar machenden Beiträge außerhalb des angegebenen Definitionsbereiches der empirischen Verteilung.



Zeichnung [5.2 - B7 - Z1]

KOERPERGROESSENVERTEILUNG II

(CM-KLASSEN), 1. APPROXIMATIONSSCHRITT



Zeichnung 5.2 - B7 - Z2

KØERPERGRØESSENVERTEILUNG II

(CM-KLASSEN), 5. APPRØXIMATIØNSSCHRITT

BEISPIEL [5.2 - B 8] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathfrak{H}$) :

Körpergrößenverteilung III; Körpergrößenverteilung Mistelbacher Rekruten (1913); (cm-Klassen)

Quelle : [26], I, S. 35

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : cm

Stichprobenumfang (n) : 906

Zahl der Klassen (s) von $\mathfrak{H}$: 13

Klassengrenzen (x_i) von $\mathfrak{H}$:

$x_0 = 146{,}5,\ x_1 = 155{,}5,\ x_2 = 157{,}5 \ldots,\ x_{12} = 177{,}5,\ x_{13} = 183{,}5$

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathfrak{H}$ (Zerlegung $\tilde{\mathfrak{F}}$) :

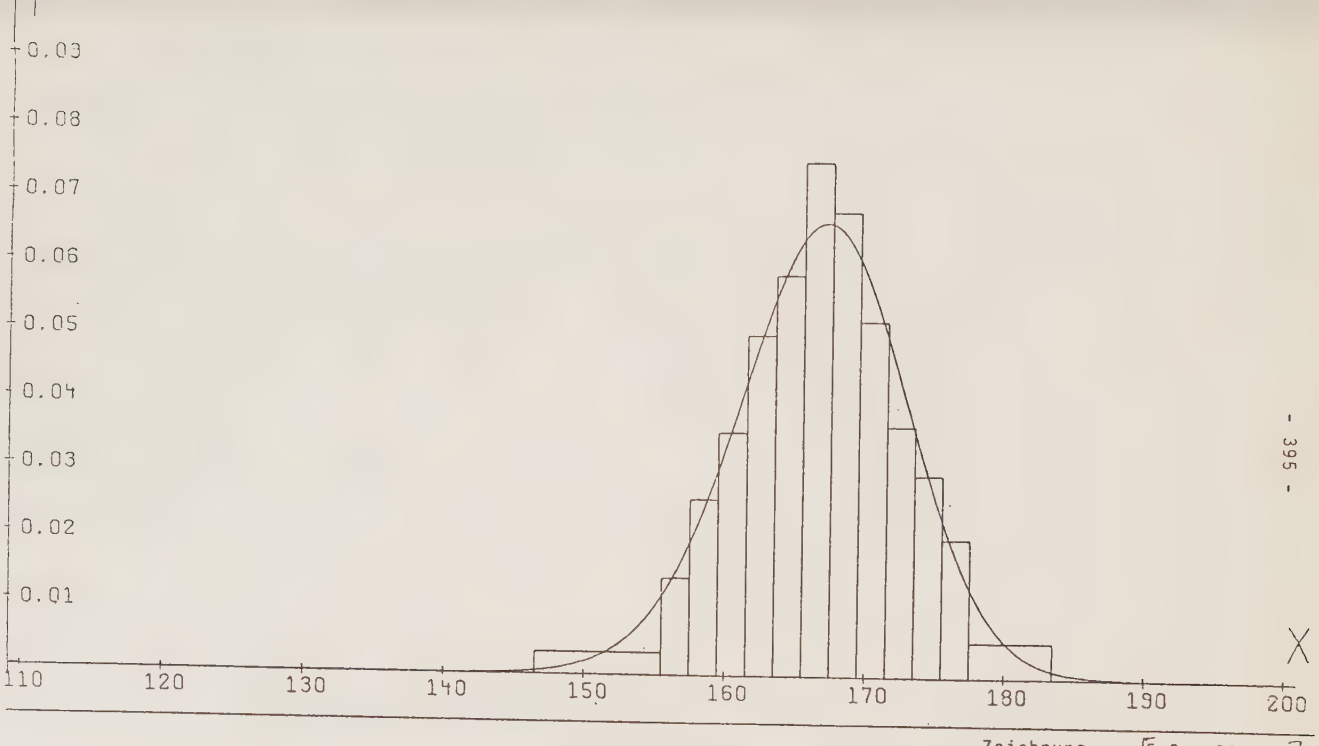
$n_1 = 100,\ n_2 = \ldots = n_{12} = 30,\ n_{13} = 90$

Bemerkungen :

	Approximationsschritt				
	k = 1	k = 4	k =	k =	k =
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	166,74	166,77			
Standardabweichung ($\sigma = \sqrt{\mu_2}$)	6,08	5,83			
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	- 0,14	$-6,36_{10}-2$			
PEARSONscher Koeffizient β_1 ($= \mu_3^{*2}$)	$2,09_{10} - 2$	$4,05_{10}-3$			
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	3,19	2,88			
PEARSONscher Koeffizient ε	$5,09_{10} - 2$	$-1,16_{10}-2$			
PEARSON-Typ	II	I			
Zugehörige Parameterwerte :					
In Falle von Typ I / Typ II / Typ III					
x_2 / r / x_2	175,52	123,70			
x_1 / q / x_1	37,91	201,50			
s_2 / s / s_2	21,96	22,81			
s_1 / ν / s_1	9,70	18,20			
y^* / y^* / y^*	$4,92_{10}$ 67	$3,19_{10}-67$			
Bemerkungen :					

Intervall i	Emp. Häufigk h_i	Approximationsschritt k = 1		k = 4		k =		k =		k =	
		$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$
1	27	32,7 [1]	1,01	25,5 [1]	$9,95_{10}-2$						
2	26	27,8	0,12	27,5	$7,83_{10}-2$						
3	47	44,8	0,11	46,1	$1,74_{10}-2$						
4	65	66,4	$2,82_{10}-2$	69,1	0,24						
5	91	89,6	$2,24_{10}-2$	92,7	$3,19_{10}-2$						
6	107	109,4	$5,15_{10}-2$	111,8	0,20						
7	137	119,9	2,43	121,0	2,11						
8	124	117,4	0,37	117,6	0,35						
9	95	102,1	0,49	102,1	0,50						
10	67	78,6	1,72	78,9	1,82						
11	54	53,6	$3,21_{10}-3$	54,0	$9,72_{10}-8$						
12	37	32,3	0,68	32,3	0,69						
13	29	31,1 [1]	0,14	27,8 [1]	$5,63_{10}-2$						
Σ			7,18		6,21						
Zahl der Freiheitsgrade (F.G.)			8		8						
χ^2 (α = 0,05; F.G.)			15,51		15,51						

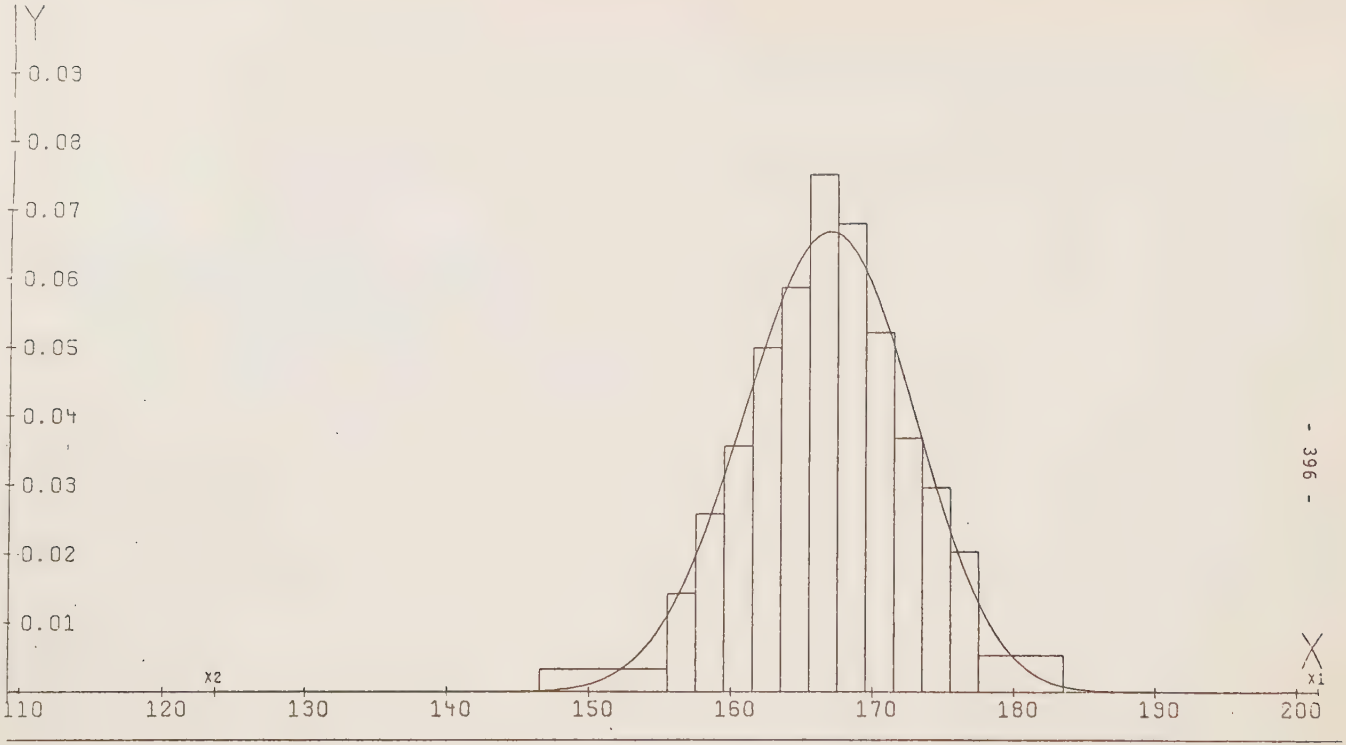
1) Einschließlich der sich in diesem Beispiel bemerkbar machenden Beiträge außerhalb des angegebenen Definitionsbereiches der empirischen Verteilung



Zeichnung [5.2 - B8 - Z1]

KOERPERGROESSENVERTEILUNG III

(CM-KLASSEN), 1. APPROXIMATIONSSCHRITT



Zeichnung [5.2 - B8 - Z2]

KØERPERGRØESSENVERTEILUNG III

(CM-KLASSEN), 4. APPRØXIMATIONSSCHRITT

BEISPIEL [5.2 - B 9] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathfrak{H}$) :

Körpergrößenverteilung I

Quelle : vgl. [5.2 - B 6]

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : inch

Stichprobenumfang (n) : 8585

Zahl der Klassen (s) von $\mathfrak{H}$: 21

Klassengrenzen (x_i) von $\mathfrak{H}$:

$X_0 = 56{,}9375,\ X_1 = 57{,}9375,\ \ldots,\ X_{22} = 77{,}9375$

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathfrak{H}$ (Zerlegung $\mathfrak{F}$) :

$n_1 = \ldots = n_{21} = 30$

Bemerkungen :

In diesem Beispiel wird untersucht, ob zu der oben angegebenen empirischen Verteilung die Normalverteilung (vgl. 2.3.1.) als theoretische Verteilung infrage kommt. Für die Parameter μ'_1 und σ der Normalverteilung werden die Schätzwerte aus

(1) [5.2 - B 6] , 1. Schritt
(2) [5.2 - B 6] , 3. Schritt

betrachtet.

	Vergleichsart				
	(1)	(2)			
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	67,46 [1]	67,46 [2]			
Standardabweichung ($\sigma = \sqrt{\mu'_2}$)	2,57 [1]	2,56 [2]			
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	0	0			
PEARSONscher Koeffizient β_1 ($= \mu_3^{*2}$)	0	0			
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	3	3			
PEARSONscher Koeffizient $\varkappa$	./.	./.			
PEARSON-Typ	0	0			
Zugehörige Parameterwerte :	s.o.	s.o.			

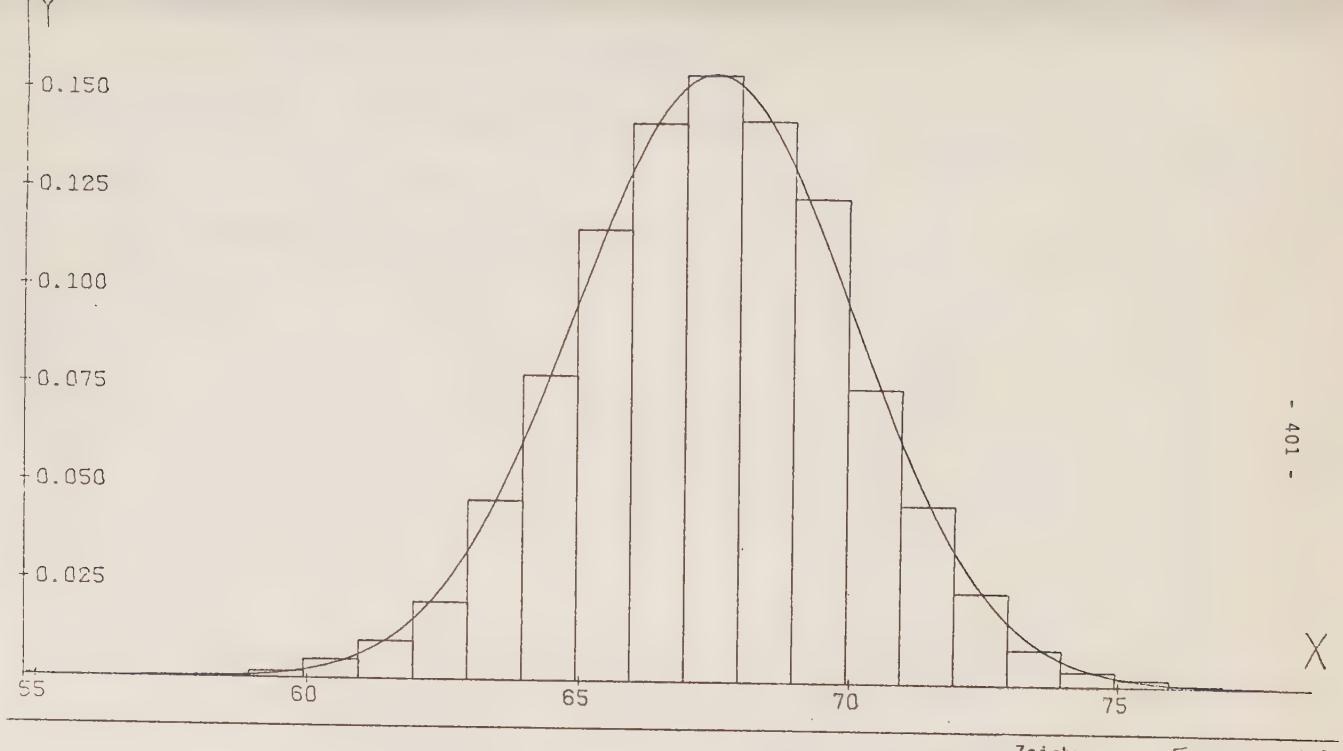
In Falle von

Typ I	Typ II	Typ III
x_2	r	x_2
x_1	q	x_1
s_2	s	s_2
s_1	ν	s_1
y^*	y^*	y^*

Bemerkungen : 1) vgl. [5.2 - B 6], 1. Schritt
2) vgl. [5.2 - B 6], 3. Schritt

Intervall i	Emp. Häufigk h_i	Vergleichsart (1)		(2)							
		$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
1	2	0,7		0,7							
2	4	3,1	3,38	2,9	4,84						
3	14	10,9		10,3							
4	41	33,5		32,2							
5	83	88,7	0,36	86,3	0,12						
6	169	202,1	5,42	198,6	4,41						
7	394	396,6	$1,74_{10^{-2}}$	393,1	$2,00_{10^{-3}}$						
8	669	670,5	$3,44_{10^{-3}}$	669,0	$6,49_{10^{-7}}$						
9	990	976,4	0,19	978,8	0,13						
10	1223	1224,6	$2,21_{10^{-3}}$	1231,1	$5,36_{10^{-2}}$						
11	1329	1323,1	$2,64_{10^{-2}}$	1331,4	$4,24_{10^{-3}}$						
12	1230	1231,3	$1,31_{10^{-3}}$	1237,9	$5,00_{10^{-2}}$						
13	1063	987,0	5,86	989,5	5,46						
14	646	681,5	1,84	680,0	1,70						
15	392	405,3	0,44	401,8	0,24						
16	202	207,6	0,15	204,1	$2,16_{10^{-2}}$						
17	79	91,6	1,73	89,1	1,15						
18	32	34,8		33,5							
19	16	11,4	0,46	10,8	1,03						
20	5	3,2		3,0							
21	2	0,8		0,7							

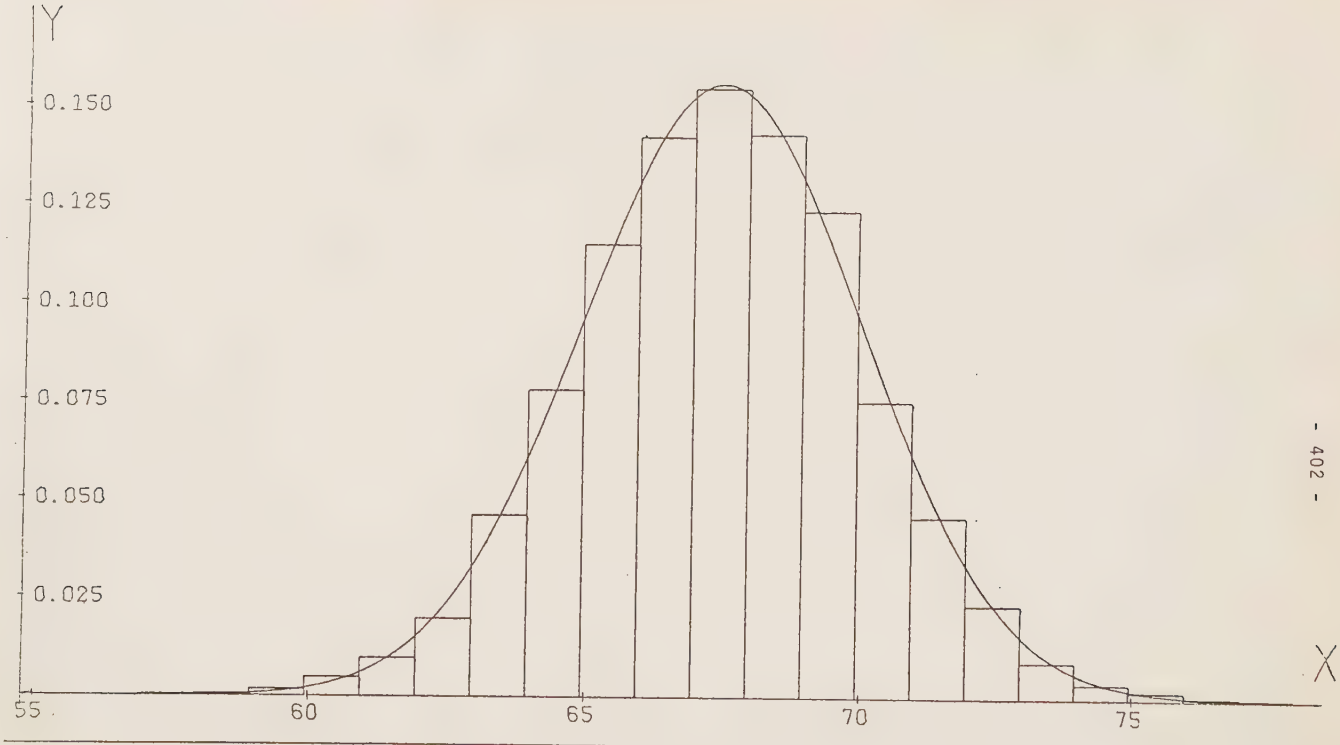
Fortsetzung		Vergleichsart									
		(1)		(2)							
Intervall i	Emp. Häufigk h_i	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
Σ			19,88		19,21						
Zahl der Freiheitsgrade (F.G.)			12		12						
χ^2 (α = 0,05;F.G.)			21,03		21,03						



Zeichnung [5.2 - B9 - z1]

KØERPERGRØESSENVERTEILUNG I

VERGLEICH MIT NØRMALVERTEILUNG, (1)



Zeichnung [5.2 - B9 - Z2]

KØERPERGRØESSENVERTEILUNG I

VERGLEICH MIT NØRMALVERTEILUNG, (2)

BEISPIEL [5.2 - B 10] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathcal{G}$) :

Körpergrößenverteilung III

Quelle : vgl. [5.2 - B 8]

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : inch (aus cm umgerechnet)

Stichprobenumfang (n) : 906

Zahl der Klassen (s) von $\mathcal{G}$: 13

Klassengrenzen (x_i) von $\mathcal{G}$:

vgl. [5.2 - B 8] ; jedoch nunmehr umgerechnet in ich

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathcal{G}$ (Zerlegung $\mathcal{F}$) :

$n_1 = 100$, $n_2 = \ldots = n_{12} = 30$, $n_{13} = 90$

Bemerkungen :

Oben angegebene empirische Verteilung wird - nach Umrechnung der Klassengrenzen von cm in inch - in Beziehung gebracht zu der theoretischen PEARSON-Verteilung, die definiert ist bei Vergleichsart

(1) durch die Schätzwerte für die ersten vier Momente zur Körpergrößenverteilung I aus [5.2 - B 6], Schritt 3;
(2) durch den - von cm in inch umgerechneten - Schätzwert für das 1. Moment aus [5.2 - B 8], Schritt 4 und die Schätzwerte für die Standardabweichung sowie das 3. und 4. standardisierte Moment aus [5.2 - B 6], Schritt 3;
(3) durch die - von cm in inch umgerechneten - Schätzwerte für das 1. Moment und die Standardabweichung aus [5.2 - B8], Schritt 4 und die Schätzwerte für das 3. und 4. standardisierte Moment aus [5.2 - B 6], Schritt 3.

	Vergleichsart (1)	(2)	(3)		
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	67,46 [1]	65,66 [2]	65,66 [2]		
Standardabweichung ($\sigma' = \sqrt{\mu'_2}$)	2,56 [1]	2,56 [1]	2,30 [2]		
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	$-1,24_{10}-2$ [1]	$-1,24_{10}-2$ [1]	$-1,24_{10}-2$ [1]		
PEARSONscher Koeffizient β_1 ($= \mu_3^{*2}$)	$1,54_{10}-4$	$1,54_{10}-4$	$1,54_{10}-4$		
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	3,15 [1]	3,15 [1]	3,15 [1]		
PEARSONscher Koeffizient $\varkappa$	$3,89_{10}-4$	$3,89_{10}-4$	$3,89_{10}-4$		
PEARSON-Typ	II	II	II		
Zugehörige Parameterwerte :					
In Falle von Typ I / Typ II / Typ III					
x_2 / r / x_2	67,79	85,35	65,95		
x_1 / q / x_1	16,64	998,03	14,94		
s_2 / s / s_2	22,69	22,69	22,69		
s_1 / ν / s_1	0,86	0,86	0,86		
y^* / y^* / y^*	$4,15_{10}54$	$3,49_{10}133$	$3,51_{10}52$		

Bemerkungen :

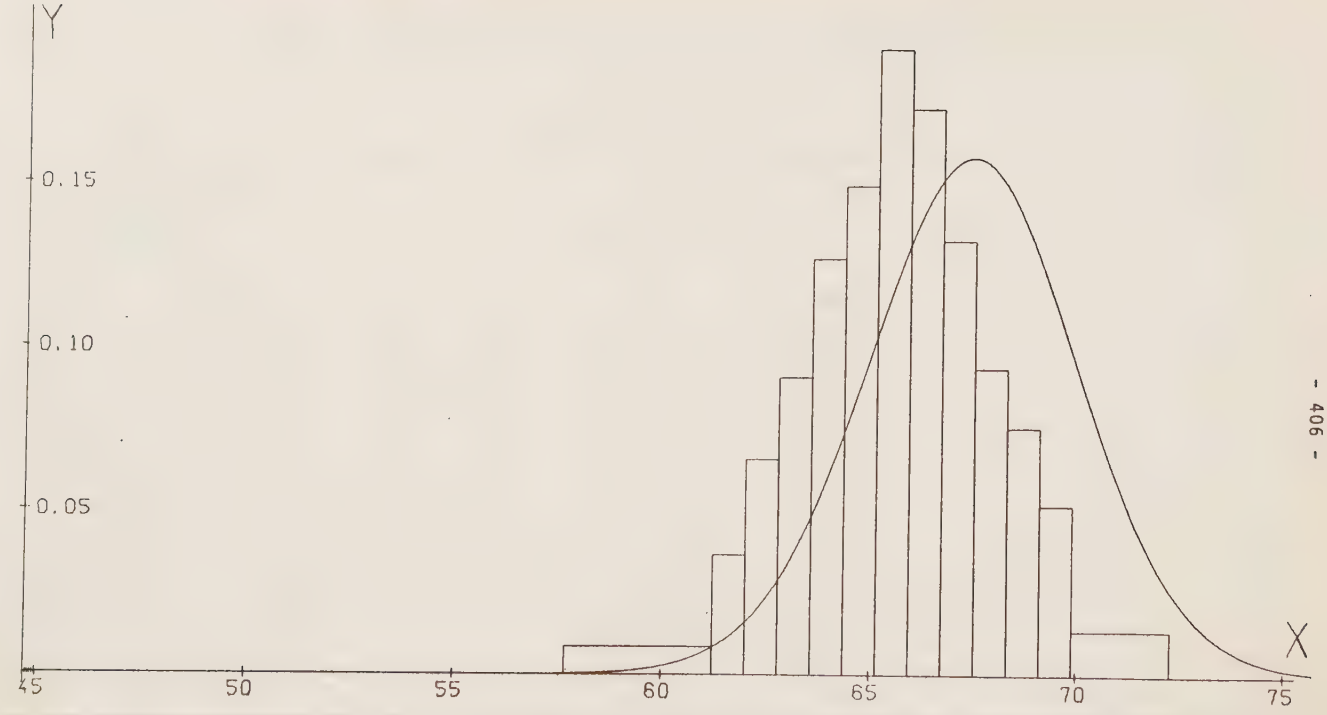
[1] vgl. [5.2 - B 6], Schritt 3

[2] vgl. [5.2 - B 6], Schritt 4 (mit Umrechnung von cm in inch)

Intervall i	Emp. Häufigk h_i	Vergleichsart (1) $n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	(1) $X^2_{(k),i}$	(2) $n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	(2) $X^2_{(k),i}$	(3) $n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	(3) $X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
1	27	7,4	51,34	37,6 [1]	2,97	24,7 [1]	0,21				
2	26	8,3	37,81	31,0	0,80	25,7	$4,35_{10}{}^{-3}$				
3	47	15,5	64,05	48,3	$3,42_{10}{}^{-2}$	44,2	0,18				
4	65	26,9	54,19	68,9	0,22	68,3	0,16				
5	91	42,9	53,96	89,5	$2,57_{10}{}^{-2}$	94,3	0,12				
6	107	62,8	31,13	105,5	$2,04_{10}{}^{-2}$	115,6	0,64				
7	137	83,8	33,73	112,7	5,25	125,3	1,09				
8	124	101,7	4,90	108,8	2,12	120,0	0,13				
9	95	111,7	2,50	95,1	$2,69_{10}{}^{-5}$	101,5	0,42				
10	67	111,1	17,48	75,2	0,89	76,0	1,06				
11	54	99,8	21,04	54,0	$8,16_{10}{}^{-6}$	50,6	0,23				
12	37	81,2	24,08	35,4	$7,44_{10}{}^{-2}$	30,1	1,60				
13	29	152,7 [1]	100,18	43,9 [1]	5,06	29,6 [1]	$1,21_{10}{}^{-2}$				
Σ			496,40		17,46		5,85				
Zahl der Freiheitsgrade (F.G) [2]			12		11		10				
χ^2 (α= 0,05; F.G.)			21,03		19,67		18,31				

1) Einschließlich der sich hier bemerkbar machenden Beiträge außerhalb des angegebenen Definitionsbereiches der empirischen Verteilung

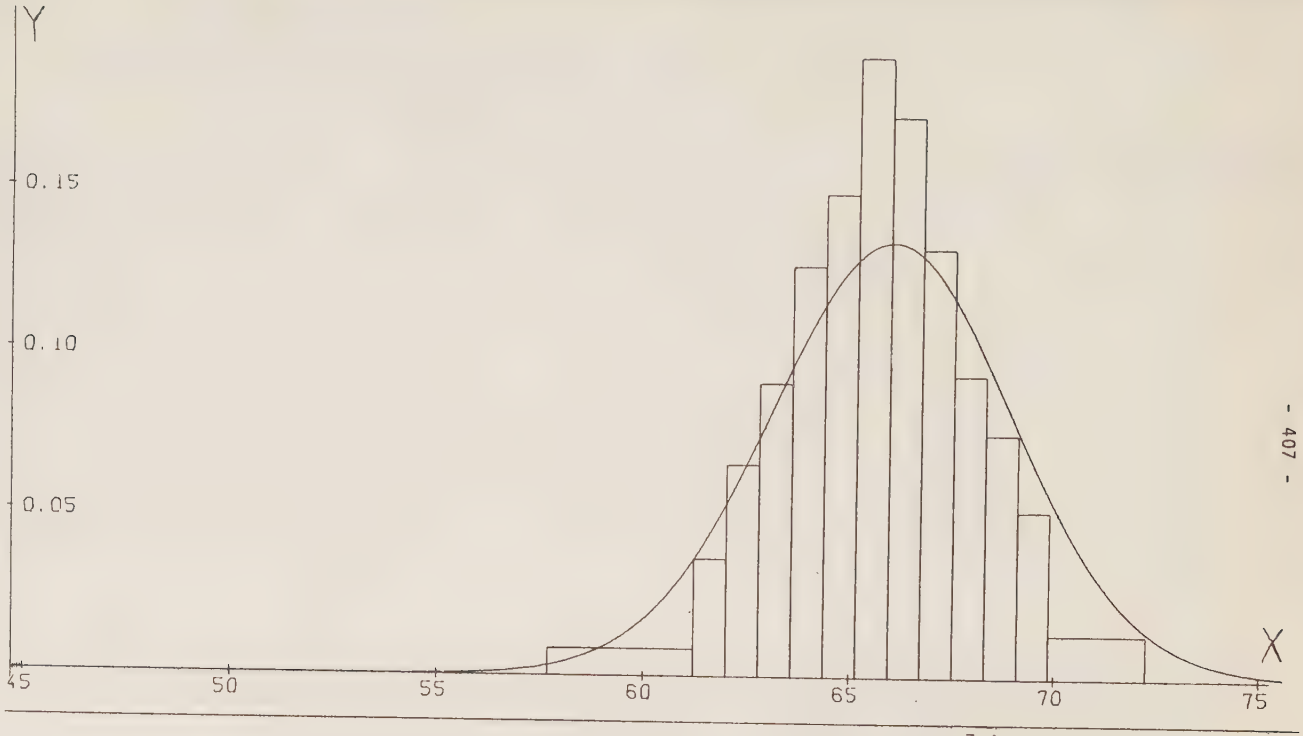
2) Unter Vorbehalt.



Zeichnung [5.2 - B10 - Z1]

KØERPERGRØESSENVERTEILUNG III

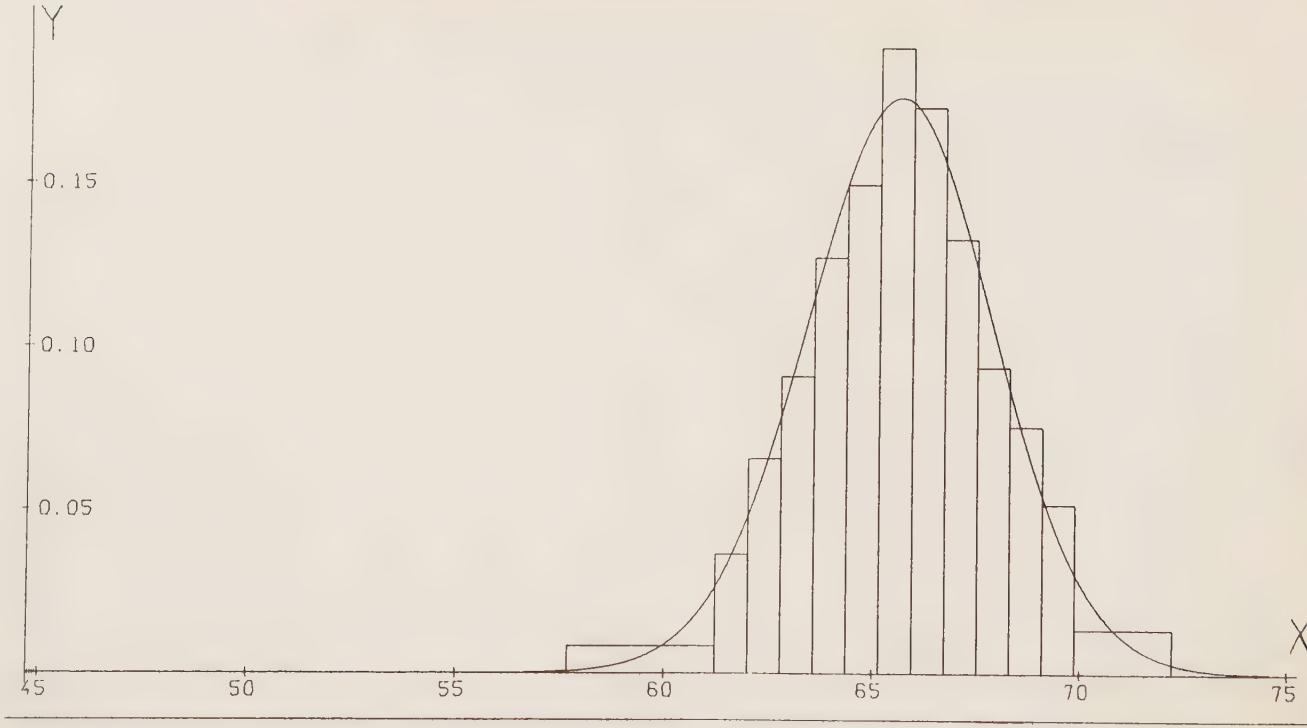
VERGLEICH MIT FKT. VØN VERTLG I, (1)



Zeichnung [5.2 - B10 - Z2]

KOERPERGROESSENVERTEILUNG III

VERGLEICH MIT FKT. VON VERTLG I, (2)



Zeichnung [5.2 - B10 - Z3]

KOERPERGROESSENVERTEILUNG III

VERGLEICH MIT FKT. VON VERTLG I, (3)

BEISPIEL [5.2 - B 11] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathfrak{H}$) : Körpergröße I

Quelle : vgl. [5.2 - B 6]

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : cm (aus inch umgerechnet)

Stichprobenumfang (n) : = 8585

Zahl der Klassen (s) von $\mathfrak{H}$: 21

Klassengrenzen (x_i) von $\mathfrak{H}$:
vgl. [5.2 - B 6], jedoch nunmehr umgerechnet in cm

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathfrak{H}$ (Zerlegung $\mathfrak{F}$) :
$n_1 = \ldots = n_{21} = 30$

Bemerkungen :

Oben angegebene empirische Verteilung wird - nach Umrechnung der Klassengrenzen von inch in cm - in Beziehung gebracht zu der theoretischen PEARSON-Verteilung, die definiert ist bei Vergleichsart

(1) durch die Schätzwerte für die ersten vier Momente zur Körpergrößenverteilung III aus [5.2 - B 8], Schritt 4;und die Schätzwerte

(2) durch den - von inch in cm umgerechneten - Schätzwert für das 1. Moment aus [5.2 - B 6], Schritt 3 und die Schätzwerte für die Standardabweichung sowie das 3. und 4. standardisierte Moment aus [5.2 - B 8], Schritt 4;

(3) durch die - von inch in cm umgerechneten - Schätzwerte für das 1. Moment und die Standardabweichung aus [5.2 - B 6], Schritt 3 und die Schätzwerte für das 3. und 4. standardisierte Moment aus [5.2 - B 8], Schritt 4.

	Vergleichsart (1)	(2)	(3)		
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	166,77 [1]	171,34 [2]	171,34 [2]		
Standardabweichung ($\sigma = \sqrt{\mu_2}$)	5,83 [1]	5,83 [1]	6,49 [2]		
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	$-6,36_{10}-2$ [1]	$-6,36_{10}-2$ [1]	$-6,36_{10}-2$ [1]		
PEARSONscher Koeffizient β_1 ($= \mu_3^{*2}$)	$4,04_{10}-3$	$4,04_{10}-3$	$4,04_{10}-3$		
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	2,88 [1]	2,88 [1]	2,88 [1]		
PEARSONscher Koeffizient $\varkappa$	$-1,16_{10}-2$	$-1,16_{10}-2$	$-1,16_{10}-2$		
PEARSON-Typ	I	I	I		
Zugehörige Parameterwerte :					
In Falle von Typ I / Typ II / Typ III					
x_2 / r / x_2	123,70	128,27	123,38		
x_1 / q / x_1	201,50	206,08	210,02		
s_2 / s / s_2	22,81	22,81	22,81		
s_1 / ? / s_1	18,20	18,20	18,20		
y^* / y^* / y^*	$3,19_{10}-67$	$3,19_{10}-67$	$3,47_{10}-69$		

Bemerkungen :

[1] vgl. [5.2 - B 8] , Schritt 4

[2] vgl. [5.2 - B 6] , Schritt 3 (mit Umrechnung von inch in cm)

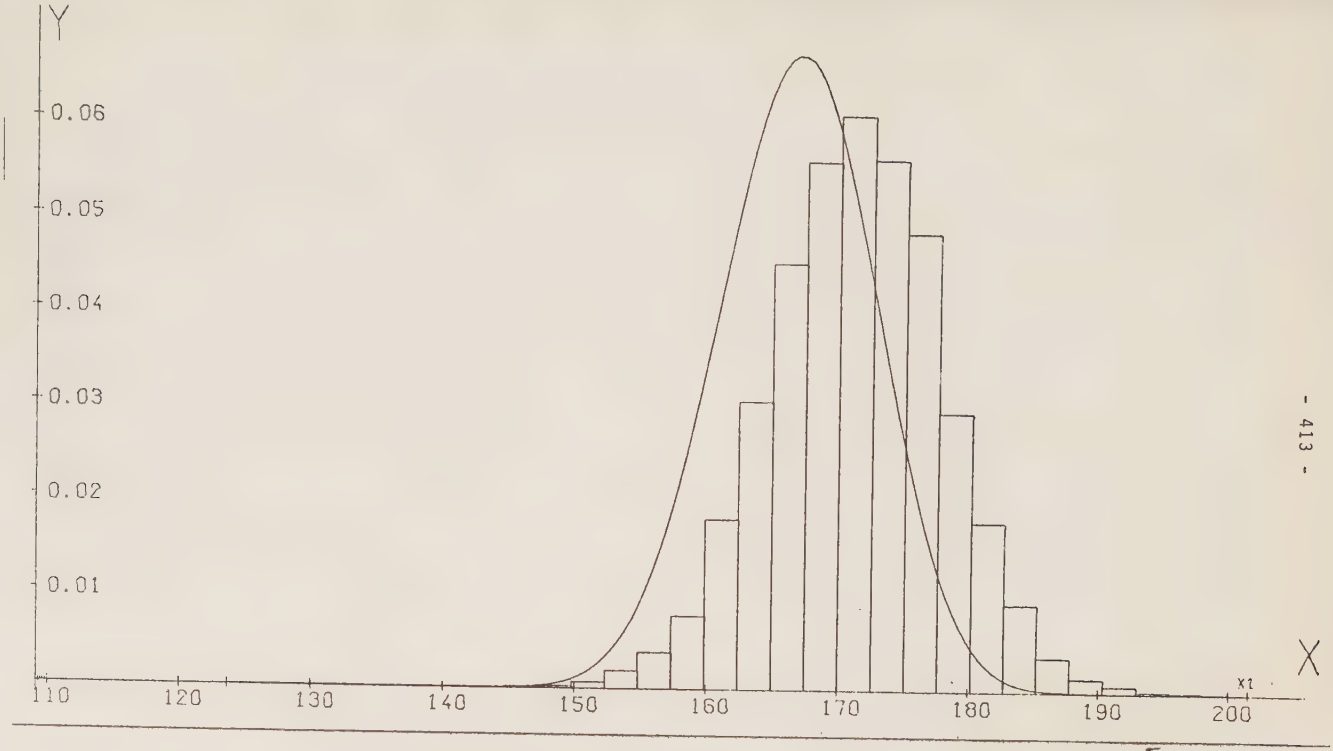
Intervall i	Emp. Häufigk h_i	Vergleichsart (1) $n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	(1) $X^2_{(k),i}$	(2) $n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	(2) $X^2_{(k),i}$	(3) $n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	(3) $X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
1	2	2,9 [1]		0,01		0,6 [1]					
2	4	11,3	23,4	0,5	72,12	2,5	4,01				
3	14	42,1		3,3		10,3					
4	41	123,1	54,8	15,0		33,8					
5	83	291,4	149,0	53,1		91,5	0,78				
6	169	567,9	280,2	148,6	2,81	207,5	7,16				
7	394	922,7	302,9	337,9	9,33	401,1	0,12				
8	669	1258,6	276,2	634,6	1,87	666,7	$7,66_{10^{-3}}$				
9	990	1445,2	143,4	995,2	$2,77_{10^{-2}}$	960,0	0,94				
10	1223	1394,9	21,2	1311,7	5,99	1201,6	0,38				
11	1329	1124,7	37,1	1455,3	10,96	1308,7	0,32				
12	1230	749,3	308,5	1356,0	11,70	1237,7	$4,78_{10^{-2}}$				
13	1063	405,3	1067,5	1053,6	$8,30_{10^{-2}}$	1011,5	2,62				
14	646	173,5	1286,9	674,4	1,20	708,5	5,51				
15	392	56,7	1984,5	349,0	5,30	420,0	1,86				
16	202	13,4		142,0	25,32	207,0	0,12				
17	79	2,1		43,7	28,51	82,2	0,18				
18	32	0,2	6528,0	9,6		26,0					
19	16	(0)		1,4	173,53	6,1	14,33				
20	5	(0)		0,1		1,0					
21	2	(0)		(0)		0,1					

Fortsetzung		Vergleichsart									
Intervall i	Emp. Häufigk h_i	(1)		(2)		(3)					
		$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
Σ			12463,7		348,74		38,38				
Zahl der Freiheitsgrade (F.G.)2)			13		12		12				
χ^2 (α=0,05; F.G.)			22,36		21,03		21,03				

---

1) Einschließlich der sich hier bemerkbar machenden Beiträge außerhalb des angegebenen Definitionsbereiches der empirischen Verteilung

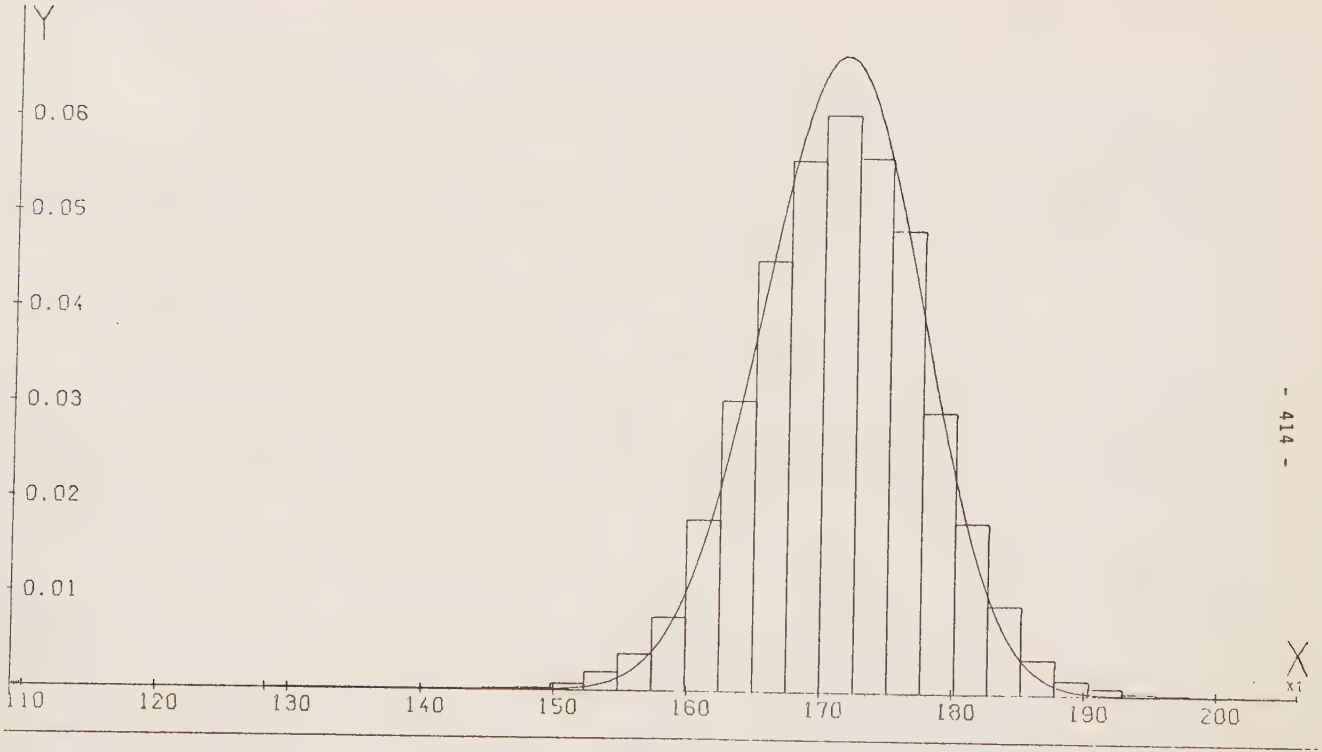
2) Unter Vorbehalt.



Zeichnung [5.2 - B11 - Z1]

KOERPERGROESSENVERTEILUNG I

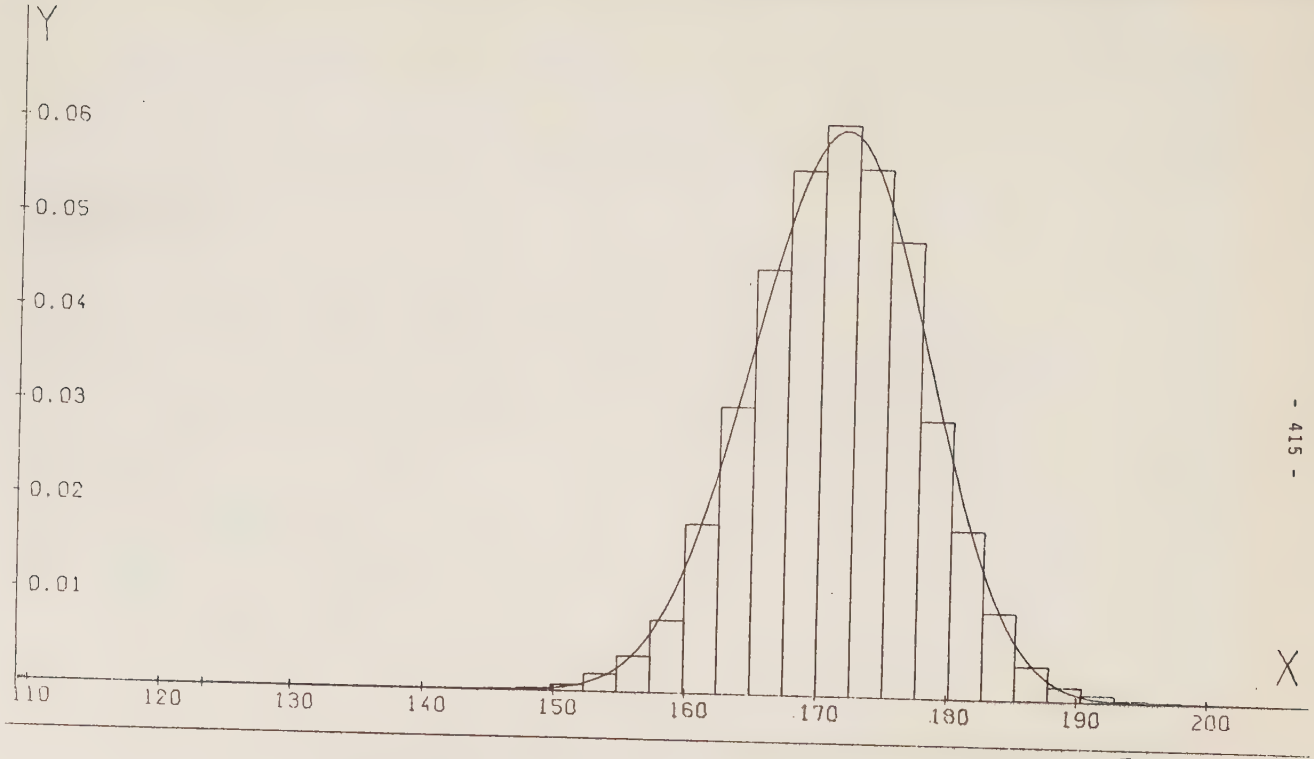
VERGLEICH MIT FKT. VON VERTLG III, (1)



Zeichnung (5.2 - B11 - Z2)

KOERPERGROESSENVERTEILUNG I

VERGLEICH MIT FKT. VON VERTLG III, (2)



Zeichnung [5.2 - B11 - Z3]

KOERPERGROESSENVERTEILUNG I

VERGLEICH MIT FKT. VON VERTLG III, (3)

BEISPIEL [5.2 - B 12] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathcal{G}$) :

Körpergröße IV (Körpergrößenverteilung nordamerikanischer Freiwilliger (1865), (inch-Klassen))

Quelle : [26], I, S. 139

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : inch

Stichprobenumfang (n) : 25878

Zahl der Klassen (s) von $\mathcal{G}$: 16

Klassengrenzen (x_i) von $\mathcal{G}$:

$x_0 = 51,\ x_1 = 58,\ x_3 = 61,\ x_4 = 62,\ x_5 = 63,\ \ldots,\ x_{15} = 74,\ x_{16} = 78$

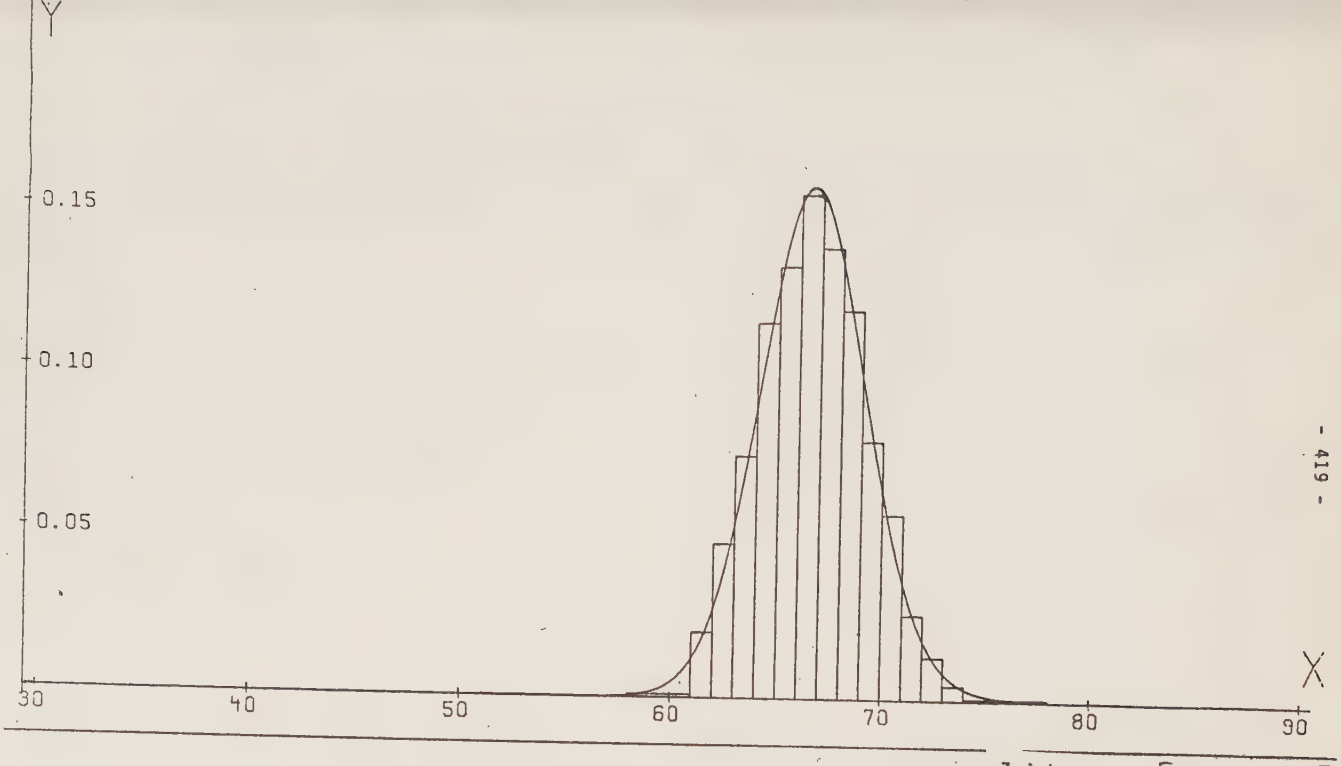
Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathcal{G}$ (Zerlegung $\tilde{\mathcal{F}}$) :

$n_1 = 100,\ n_2 = 96,\ n_3 = 32,\ \ldots,\ n_{15} = 32,\ n_{16} = 100$

Bemerkungen :

	Approximationsschritt				
	k = 1	(k = 8)	k = 9		
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	66,70	66,70	66,70		
Standardabweichung ($\sigma = \sqrt{\mu_2}$)	2,53	2,53	2,53		
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	0,12	0,13	0,13		
PEARSONscher Koeffizient β_1 ($= \mu_3^{*2}$)	$1,45_{10}{}^{-2}$	$1,60_{10}{}^{-2}$	$1,60_{10}{}^{-2}$		
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	2,91	2,82	2,82		
PEARSONscher Koeffizient $\varkappa$	$-5,01_{10}{}^{-2}$	$-2,98_{10}{}^{-2}$	$-2,98_{10}{}^{-2}$		
PEARSON-Typ	I	I	I		
Zugehörige Parameterwerte :					
In Falle von					
Typ I: x_2	51,93	55,49	55,49		
Typ I: x_1	89,73	82,50	82,50		
Typ I: s_2	19,34	10,10	10,10		
Typ I: s_1	30,70	14,64	14,64		
Typ I: y^*	$5,66_{10}{}^{-66}$	$1,10_{10}{}^{-29}$	$1,10_{10}{}^{-29}$		
Typ II: r					
Typ II: q					
Typ II: s					
Typ II: ϑ					
Typ II: y^*					
Typ III: x_2					
Typ III: x_1					
Typ III: s_2					
Typ III: s_1					
Typ III: y^*					
Bemerkungen :					

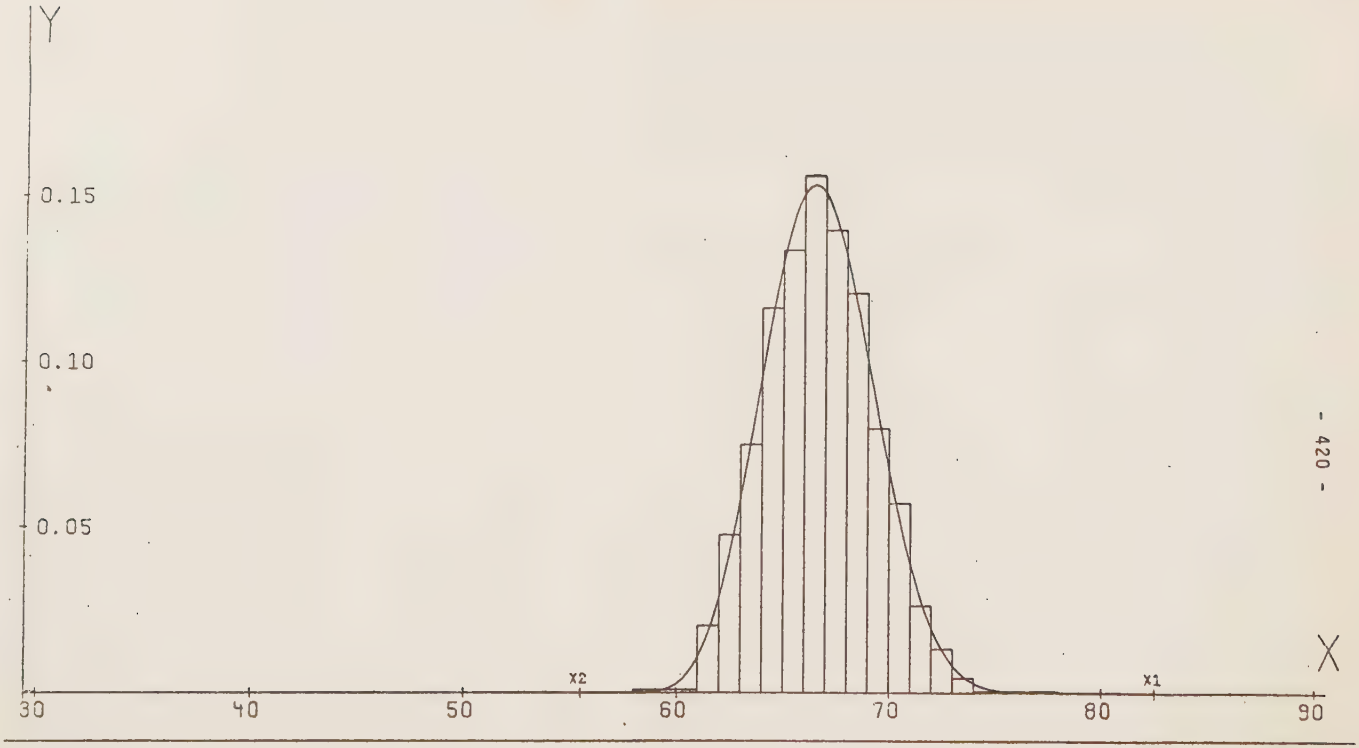
Intervall i	Emp. Häufigk h_i	Approximationsschritt k = 1		(k = 8)		k = 9					
		$n \cdot \tilde{\pi}(k),i$	$\chi^2(k),i$	$n \cdot \tilde{\pi}(k),i$	$\chi^2(k),i$	$n \cdot \tilde{\pi}(k),i$	$\chi^2(k),i$	$n \cdot \tilde{\pi}(k),i$	$\chi^2(k),i$	$n \cdot \tilde{\pi}(k),i$	$\chi^2(k),i$
1	21	11,8	159,74	0,2	49,58	0,2	49,57				
2	75	311,5		193,9		193,9					
3	526	492,0	2,35	483,7	3,69	483,7	3,69				
4	1237	1024,6	44,01	1103,6	16,11	1103,7	16,11				
5	1947	1844,2	5,73	1985,8	0,76	1985,8	0,76				
6	3019	2836,7	11,72	2939,2	2,17	2939,2	2,17				
7	3475	3702,1	13,93	3677,7	11,17	3677,7	11,17				
8	4054	4089,2	0,30	3959,5	2,26	3959,5	2,26				
9	3631	3831,8	10,52	3707,5	1,58	3707,5	1,58				
10	3133	2996,8	1,44	3035,5	3,13	3035,5	3,13				
11	2075	2118,5	0,89	2174,9	4,59	2174,9	4,59				
12	1485	1280,4	32,71	1358,9	11,70	1358,9	11,70				
13	680	687,5	$8,12_{10}-2$	734,5	4,04	734,5	4,04				
14	343	333,3	0,28	338,9	$4,96_{10}-2$	338,9	$4,96_{10}-2$				
15	118	148,3	6,18	130,9	1,26	130,9	1,26				
16	59	97,9	15,45	53,2	0,63	53,2	0,64				
			305,33		112,73		112,72				
Zahl der Freiheitsgrade (F.G.)			10		10		10				
χ^2 (α=0,05; F.G.			18,31		18,31		18,31				



Zeichnung [5.2 - B12 - Z1]

KOERPERGROESSENVERTEILUNG IV

(INCH-KLASSEN), 1. APPROXIMATIONSSCHRITT



Zeichnung [5.2 - B12 - Z2]

KOERPERGROESSENVERTEILUNG IV

(INCH-KLASSEN), 9. APPROXIMATIONSSCHRITT

BEISPIEL [5.2 - B 13] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathcal{G}$) :

Als "empirische" Verteilung wird hier die aus der Körpergrößenverteilung IV durch Division der einzelnen Häufigkeiten durch 10 (mit Auf- bzw. Abrundung) gewonnene "Häufigkeitsverteilung" betrachtet.

Quelle : vgl. [5.2 - B 12]

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : inch

Stichprobenumfang (n) : 2590

Zahl der Klassen (s) von $\mathcal{G}$: vgl. [5.2 - B 12]

Klassengrenzen (x_i) von $\mathcal{G}$: vgl. [5.2 - B 12]

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathcal{G}$ (Zerlegung $\tilde{\mathcal{F}}$) :
vgl. [5.2 - B 12]

Bemerkungen :

Die oben definierte "empirische Häufigkeitsverteilung" wird mit der PEARSON-Verteilung aus [5.2 - B 12], Schritt 9 in Beziehung gebracht.

Intervall i	Emp. Häufigk h_i	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
1	2	(0)	} 4,58								
2	8	19,4									
3	53	48,4	0,43								
4	124	110,5	1,66								
5	195	198,7	$7,07_{10}{}^{-2}$								
6	302	294,2	0,21								
7	348	368,1	1,10								
8	405	396,3	0,19								
9	363	371,1	0,18								
10	313	303,8	0,28								
11	208	217,7	0,43								
12	149	136,0	1,24								
13	68	73,5	0,41								
14	34	33,9	$1,96_{10}{}^{-4}$								
15	12	13,1	} $9,65_{10}{}^{-3}$								
16	6	5,3									
$\sum (= X^2_0 (\alpha))$			10,79								
s^*			14								

BEISPIEL [5.2 - B 14] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathfrak{H}$) :

Körpergrößenverteilung IV

Quelle : vgl. [5.2 - B 12]

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : inch

Stichprobenumfang (n) : 25.878

Zahl der Klassen (s) von $\mathfrak{H}$: 16

Klassengrenzen (x_i) von $\mathfrak{H}$:

$X_0 = 51,\ X_1 = 58,\ X_3 = 61,\ X_4 = 62,\ X_5 = 63,\ \ldots,\ X_{15} = 74,\ X_{16} = 78$

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathfrak{H}$ (Zerlegung $\tilde{\mathfrak{F}}$) :

$n_1 = 300,\ n_2 = 288,\ n_3 = 96,\ n_4 = 96,\ \ldots,\ n_{15} = 96,\ n_{16} = 300$

Bemerkungen :

Im Unterschied zu [5.2 - B 12] wird hier mit einer Zerlegung $\tilde{\mathfrak{f}}$ gearbeitet, die die dreifache Zahl von Intervallen aufweist.

	Approximationsschritt				
	k = 1	k = 9			
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	66,70	66,70			
Standardabweichung ($\sigma = \sqrt{\mu_2}$)	2,53	2,53			
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	0,12	0,13			
PEARSONscher Koeffizient β_1 ($= \mu_3^{*2}$)	$1,45_{10}-2$	$1,60_{10}-2$			
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	2,91	2,82			
PEARSONscher Koeffizient αe	$-5,01_{10}-2$	$-2,97_{10}-2$			
PEARSON-Typ					
Zugehörige Parameterwerte :					
In Falle von Typ I / Typ II / Typ III					
x_2 / r / x_2	51,93	55,50			
x_{1_i} / q / x_1	89,73	82,50			
s_2 / s / s_2	19,34	10,10			
s_1 / λ / s_1	30,70	14,64			
y^* / y^* / y^*	$5,66_{10}-66$	$1,11_{10}-29$			
Bemerkungen :					

Intervall i	Emp. Häufigk h_i	Approximationsschritt k = 1 $n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	k = 1 $X^2_{(k),i}$	k = 9 $n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	k = 9 $X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
1	21	11,8	159,74	0,2	49,56						
2	75	311,5		193,9							
3	526	492,0	2,35	483,7	3,69						
4	1237	1024,6	44,01	1103,6	16,11						
5	1947	1844,2	5,73	1985,8	0,76						
6	3019	2836,7	11,72	2939,2	2,17						
7	3475	3702,1	13,93	3677,7	11,17						
8	4054	4089,2	0,30	3959,5	2,26						
9	3631	3831,8	10,52	3707,5	1,58						
10	3133	2996,8	1,44	3035,5	3,13						
11	2075	2118,5	0,89	2174,9	4,59						
12	1485	1280,4	32,71	1358,9	11,70						
13	680	687,5	$8,12_{10}{}^{-2}$	734,4	4,04						
14	343	333,3	0,28	338,9	$4,98_{10}{}^{-2}$						
15	118	148,3	6,18	130,9	12,64						
16	59	97,9	15,45	53,2	0,64						
Σ			305,33		112,71						
Zahl der Freiheitsgrade (F.G.)			10		10						
χ^2 (α=0,05;F.G.)			18,31		18,31						

BEISPIEL [5.2 - B 15] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathfrak{g}$) :

Verteilung männlicher Arbeiter aus der gesamten Industrie der BRD nach der Höhe ihres Brutto-Stundenverdienstes (in DM) im Jahre 1966 (Promilleverteilung) - Zerlegung $\mathfrak{g}_{61}$

Quelle : [26] , 3, S. 40 f

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : DM

Stichprobenumfang (n) : 1000

Zahl der Klassen (s) von $\mathfrak{g}$: 7

Klassengrenzen (x_i) von $\mathfrak{g}$:

$x_0 = 0$ [1], $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 2{,}5$, ..., $x_6 = 6{,}5$, $x_7 = 9$ [1]

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathfrak{g}$ (Zerlegung $\mathfrak{F}$) :

$n_1 = 100$, $n_2 = \ldots = n_6 = 86$, $n_7 = 100$

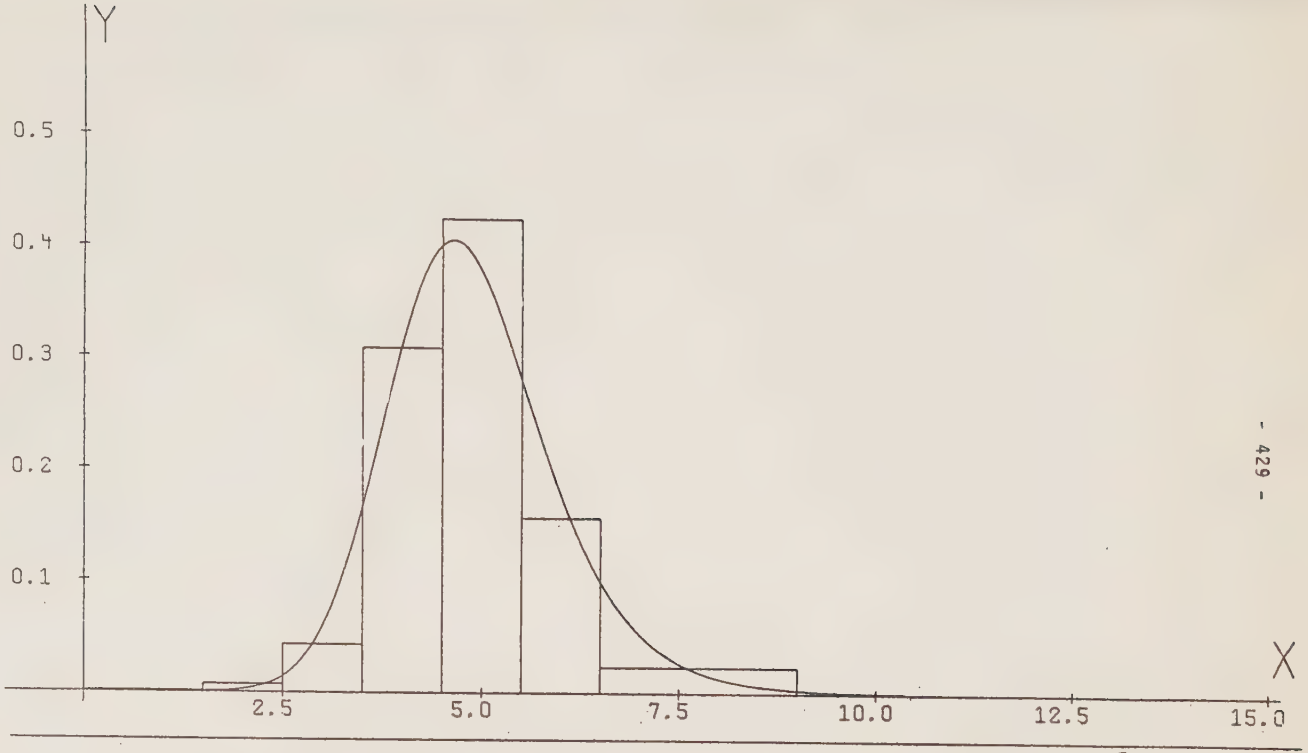
Bemerkungen :

---

1) angenommene Werte

	Approximationsschritt				
	k = 1	k = 3	k = 7		
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	4,90	4,86	4,86		
Standardabweichung ($\sigma = \sqrt{\mu_2}$)	1,07	0,96	0,95		
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	0,65	0,40	0,37		
PEARSONscher Koeffizient β_1 ($= \mu_3^{*2}$)	0,43	0,16	0,13		
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	4,27	3,99	3,96		
PEARSONscher Koeffizient æ	0,28	$8,51_{10}$-2	$6,88_{10}$-2		
PEARSON-Typ	II	II	II		
Zugehörige Parameterwerte :					
In Falle von Typ I / Typ II / Typ III					
x_2 / r / x_2	2,89	3,97	4,07		
x_1 / q / x_1	3,21	2,94	2,92		
s_2 / s / s_2	7,73	6,65	6,57		
s_1 / ϑ / s_1	- 8,43	- 3,45	- 3,03		
y^* / y^* / y^*	$3,02_{10}6$	$4,88_{10}5$	$4,17_{10}5$		
Bemerkungen :					

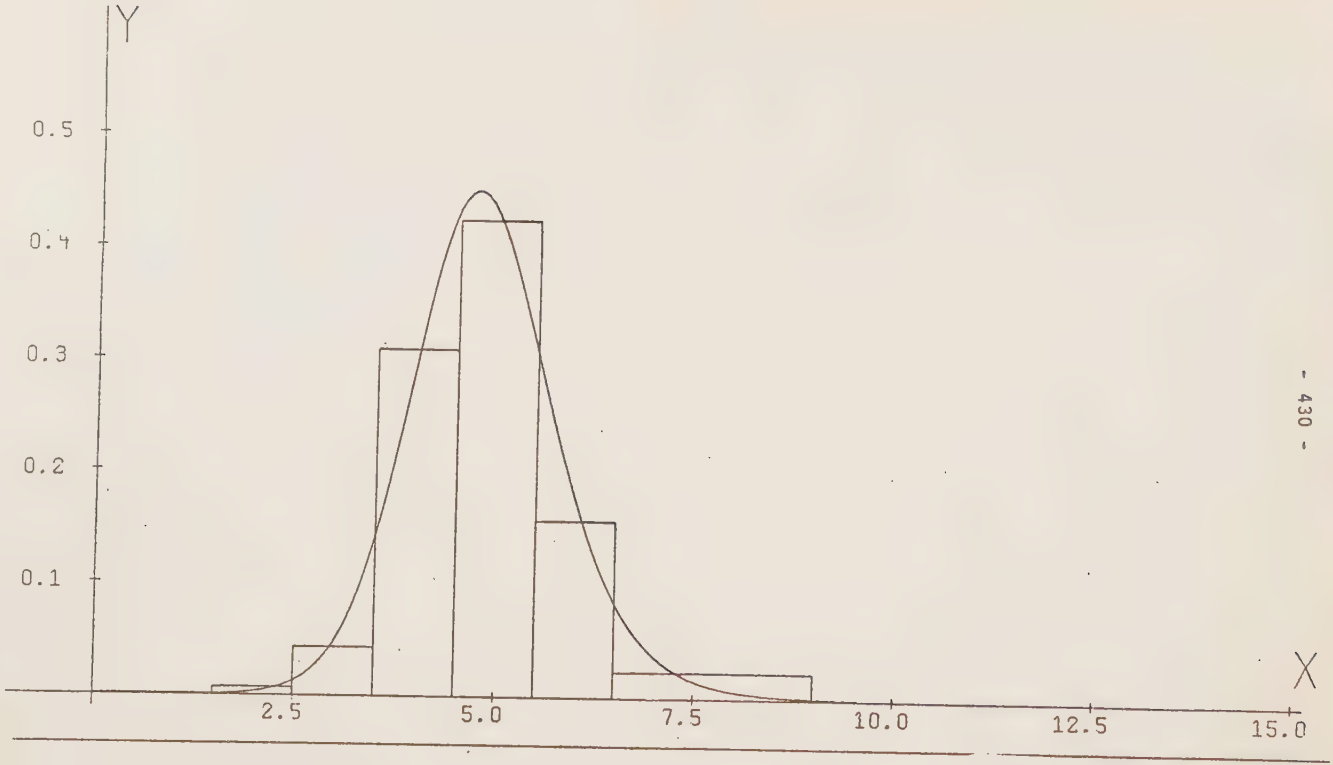
Intervall i	Emp. Häufigk h_i	Approximationsschritt k = 1		k = 3		k = 7					
		$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$
1	1	0,1	3,38	0,3	2,36	0,3	1,89				
2	7	4,1		4,4		4,6					
3	43	70,1	10,83	58,5	4,12	58,1	3,93				
4	309	303,5	$9,72_{10}$-2	296,9	0,49	294,5	0,72				
5	425	366,1	9,49	408,8	0,64	412,5	0,41				
6	157	181,5	3,32	181,0	3,18	181,9	3,41				
7	58	71,7	3,39	49,3	1,30	47,9	1,88				
Σ			30,50		12,10		12,23				
Zahl der Freiheitsgrade (F.G.)			1		1		1				
χ^2 (α= 0,05; F.G.)			3,84		3,84		3,84				



Zeichnung [5.2 - B15 - Z1]

EG-ERHEBUNG LOEHNE 1966, BRD, MAENNER

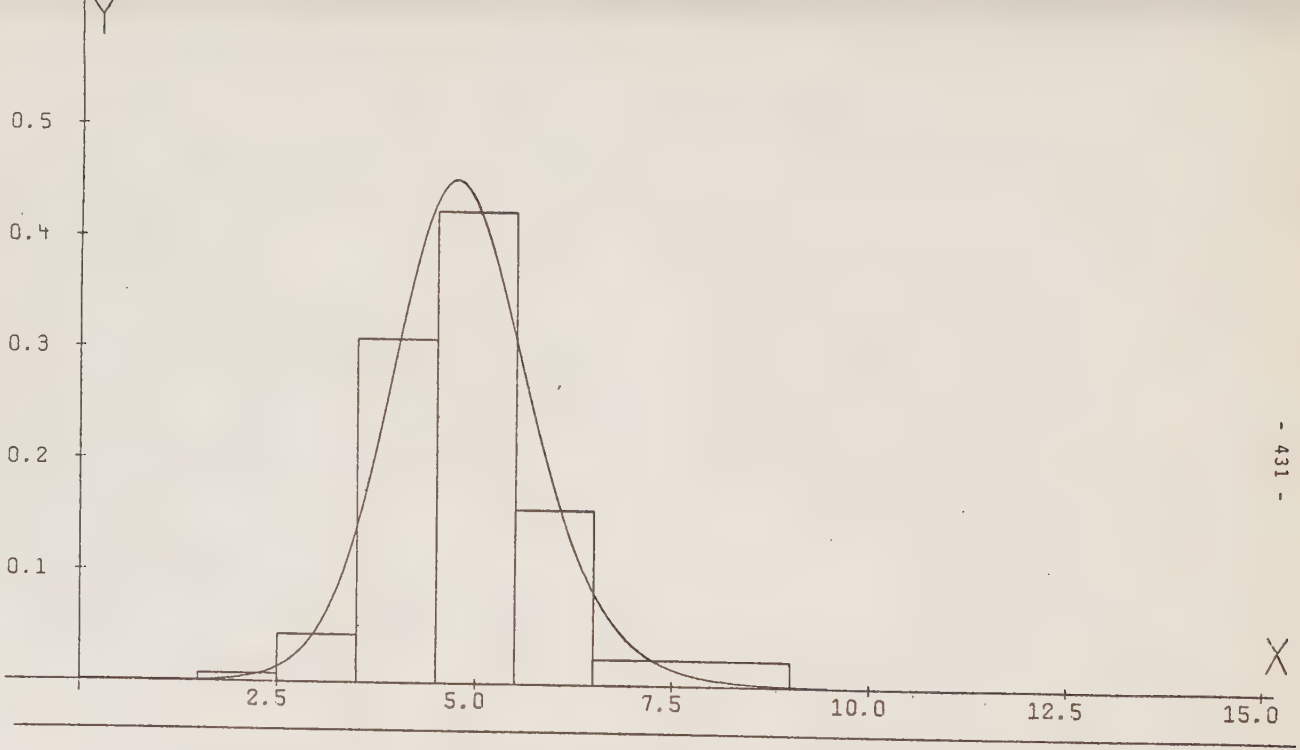
ZERLEGUNG G(G1), 1. APPROX.-SCHRITT



Zeichnung [5.2 - B15 - Z2]

EG-ERHEBUNG LØEHNE 1966, BRD, MAENNER

ZERLEGUNG G(61), 3. APPRØX.-SCHRITT



Zeichnung 5.2 - B15 - Z3

EG-ERHEBUNG LOEHNE 1966, BRD, MAENNER

ZERLEGUNG G(G1), 7. APPROX.-SCHRITT

BEISPIEL [5.2 - B 16] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathfrak{g}$) :

Verteilung männlicher Arbeiter aus der gesamten Industrie der BRD nach der Höhe ihres Bruttostundenverdienstes (in DM) im Jahre 1966 (Promilleverteilung) - Zerlegung $\mathfrak{F}$.

Quelle : [26], 3, S. 122 f

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : DM

Stichprobenumfang (n) : = 1000

Zahl der Klassen (s) von $\mathfrak{g}$: 27

Klassengrenzen (x_i) von $\mathfrak{g}$:

$x_0 = 0$ [1], $x_1 = 1{,}5$, $x_2 = 1{,}7$, $x_3 = 1{,}9$, ..., $x_{26} = 6{,}5$, $x_{27} = 9$ [1]

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathfrak{g}$ (Zerlegung $\mathfrak{F}$) :

$n_1 = 100$, $n_2 = \ldots = n_{26} = 20$, $n_{27} = 100$

Bemerkungen :

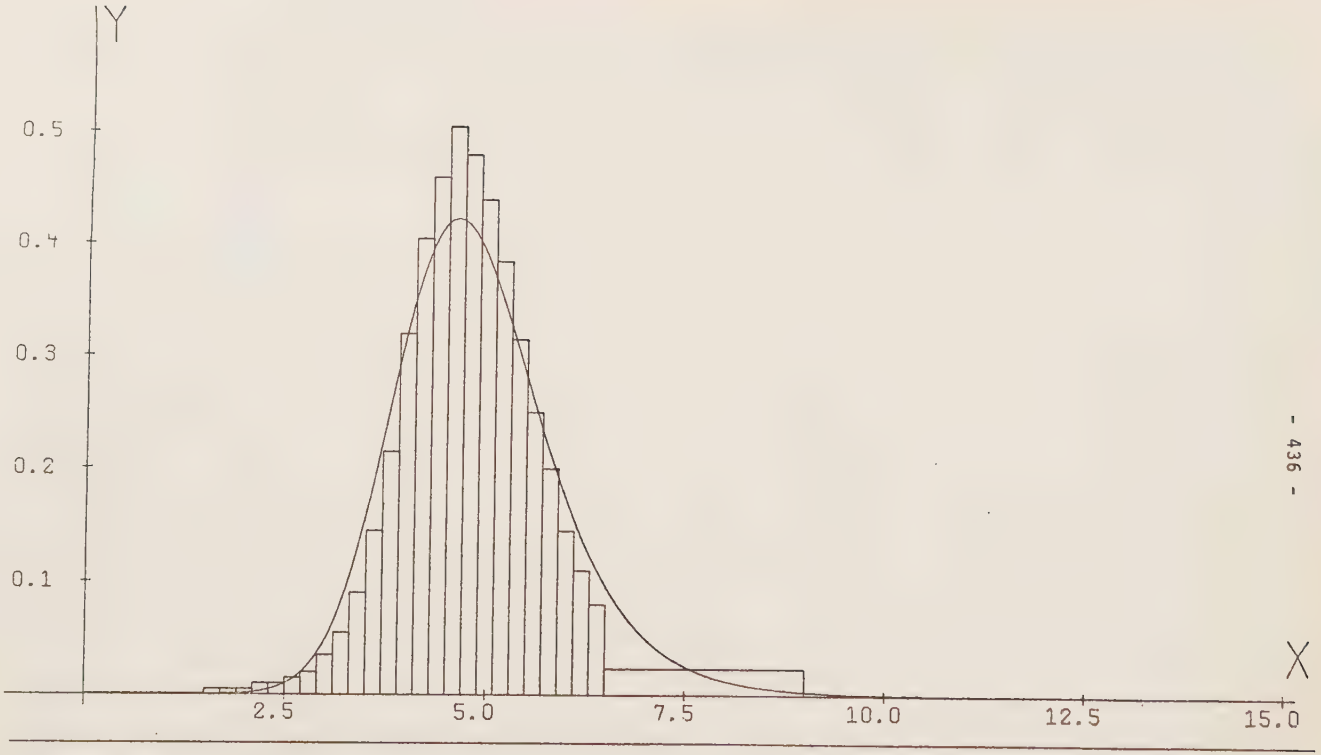
---

[1] angenommene Werte

	Approximationsschritt				
	k = 1	k = 2	k = 8		
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	4,90	4,87	4,86		
Standardabweichung ($\sigma = \sqrt{\mu_2}$)	1,04	0,96	0,95		
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	0,76	0,48	0,38		
PEARSONscher Koeffizient β_1 ($= \mu_3^{*2}$)	0,57	0,23	0,14		
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	4,60	4,35	4,16		
PEARSONscher Koeffizient æ	0,33	0,13	$6,04_{10}-2$		
PEARSON-Typ	II	II	II		
Zugehörige Parameterwerte :					
In Falle von Typ I / Typ II / Typ III					
x_2 / r / x_2	2,90	4,01	4,18		
x_1 / q / x_1	2,86	2,64	2,69		
s_2 / s / s_2	7,09	5,67	5,81		
s_1 / ∂ / s_1	- 8,55	- 3,02	- 2,44		
y^* / y^* / y^*	$1,07_{10}5$	$1,83_{10}4$	$3,51_{104}$		
Bemerkungen :					

Intervall i	Emp. Häufigk h_i	Approximationsschritt k = 1		k = 2		k = 8					
		$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$
1	1	(0)		0,3		0,4					
2	1	0,1		0,2		0,3					
3	1	0,1		0,4		0,4					
4	1	0,3	5,66	0,7	1,13	0,7	1,56				
5	2	0,7		1,1		1,3					
6	2	1,4		2,0		2,1					
7	3	2,9		3,4		3,6	0,63				
8	4	5,6	1,39	5,7	1,12	5,9	0,66				
9	7	10,1		9,4		9,5	1,04				
10	11	17,0	2,11	15,0	1,07	14,9	0,96				
11	18	26,5	2,75	23,0	1,09	22,7	0,47				
12	29	38,4	2,31	33,6	0,64	32,9	0,13				
13	43	51,5	1,41	46,5	0,27	45,5	0,37				
14	64	64,3	$1,32_{10}{}^{-3}$	60,5	0,20	59,3	0,91				
15	81	74,9	0,50	73,9	0,69	72,8	0,91				
16	92	81,9	1,26	84,4	0,68	83,9	0,78				
17	101	84,5	3,23	90,3	1,26	90,6	1,20				
18	96	82,8	2,10	90,8	0,30	91,8	0,19				
19	88	77,6	1,39	86,1	$4,07_{10}{}^{-2}$	87,7	$1,31_{10}{}^{-3}$				
20	77	69,9	0,72	77,5	$2,86_{10}{}^{-3}$	79,2	$6,08_{10}{}^{-2}$				

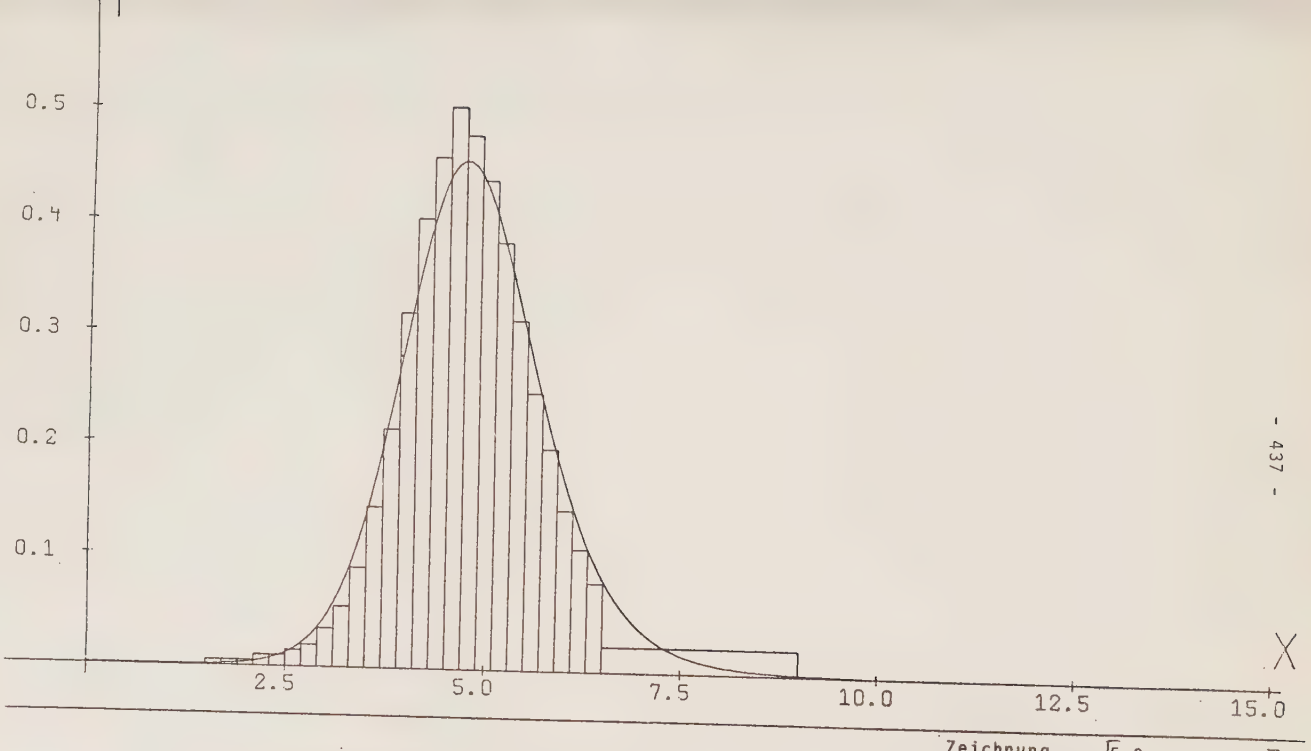
Fortsetzung		Approximationsschritt									
Intervall i	Emp. Häufigk h_i	k = 1		k = 2		k = 8					
		$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$
21	63	60,9	$7,10_{10}-2$	66,5	0,19	68,1	0,38				
22	50	51,6	$4,78_{10}-2$	54,9	0,43	56,0	0,65				
23	40	42,6	0,16	43,7	0,32	44,5	0,45				
24	29	34,5	0,88	33,9	0,71	34,2	0,79				
25	22	27,5	1,10	25,7	0,54	25,7	0,52				
26	16	21,6	1,45	19,2	0,53	18,9	0,44				
27	58	68,5	2,28	50,1	0,95	46,5	2,51				
$\sum$			30,81		12,14		14,70				
Zahl der Freiheitsgrade (F.G.)			15		15		16				
χ^2 (α= 0,05; F.G.)			25,00		25,00		26,30				



Zeichnung [5.2 - B16 - Z1]

EG-ERHEBUNG LØEHNE 1966, BRD, MAENNER

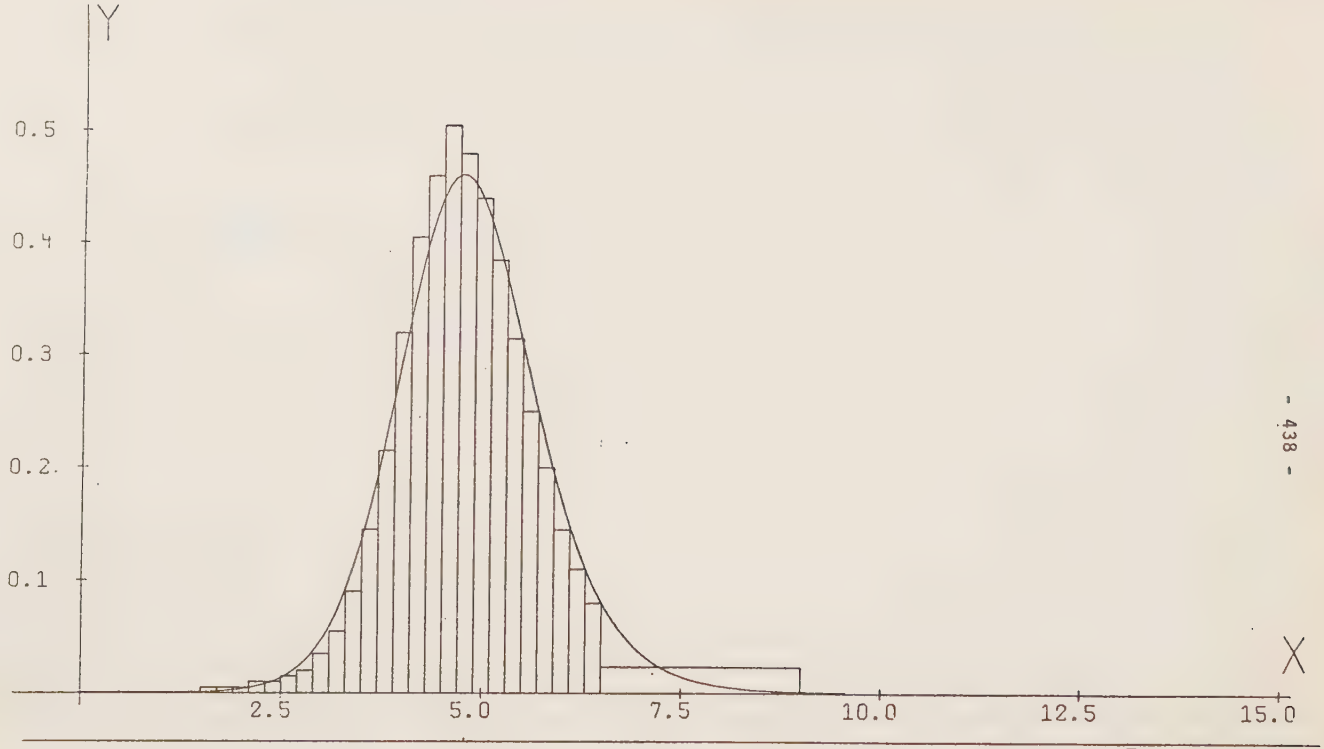
ZERLEGUNG G(F), 1. APPRØX.-SCHRITT



Zeichnung [5.2 - B16 - Z2]

EG-ERHEBUNG LØEHNE 1966, BRD, MAENNER

ZERLEGUNG G(F); 2. APPRØX.-SCHRITT



Zeichnung [5.2 - B16 - Z3]

EG-ERHEBUNG LØEHNE 1966, BRD, MAENNER

ZERLEGUNG G(F), 8. APPRØX.-SCHRITT

BEISPIEL [5.2 - B 17] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathcal{G}$) :

vgl. [5.2 - B 15]

Quelle : s.o.

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : s.o.

Stichprobenumfang (n) : s.o.

Zahl der Klassen (s) von $\mathcal{G}$: s.o.

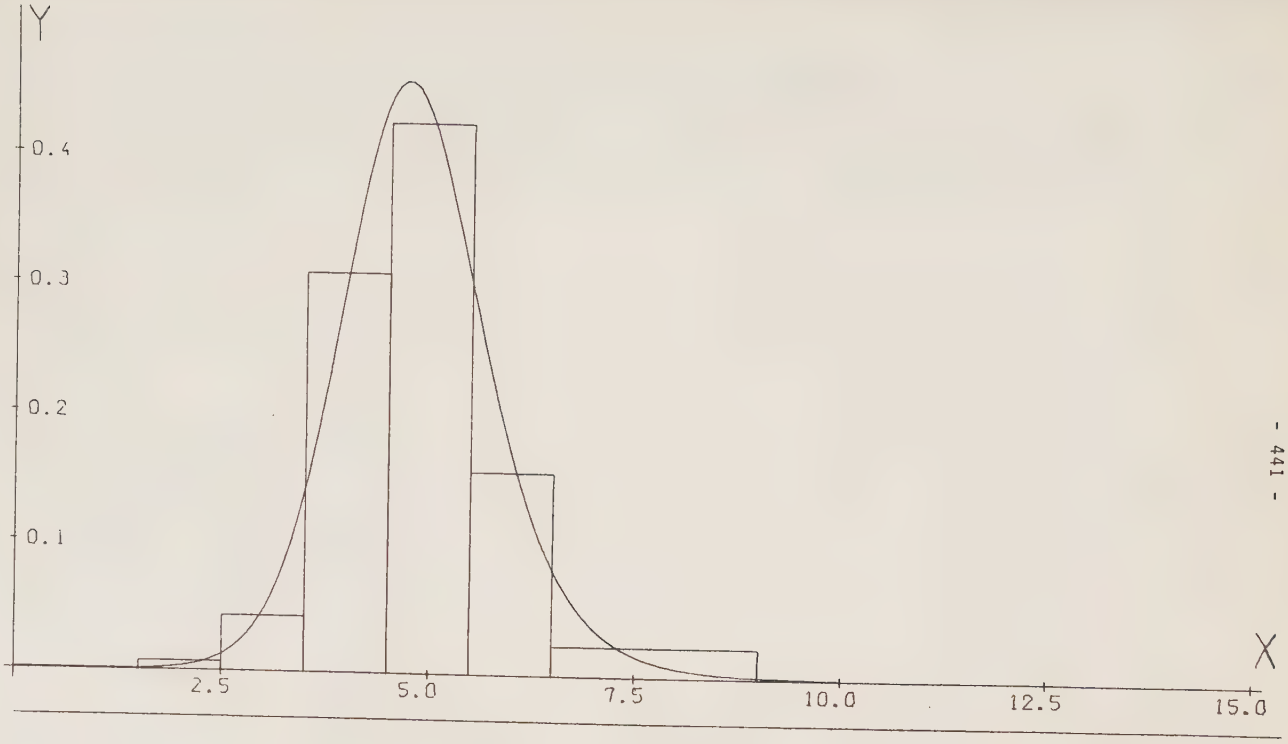
Klassengrenzen (x_i) von $\mathcal{G}$: s.o.

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathcal{G}$ (Zerlegung $\tilde{\mathcal{F}}$) : s.o.

Bemerkungen :

In diesem Beispiel interessieren wir uns für den Wert unseres Abstandsmaßes $X^2_{(k)}(\mathcal{G})$, wenn wir als empirische Verteilung die in [5.2 - B 15] angegebene Bruttostundenlöhneverteilung mit Zerlegung $\mathcal{G}_{\tilde{\mathcal{F}}}$ und als theoretische Verteilung die in [5.2 - B 16], Schritt 2 zur selben Verteilung - jedoch mit Zerlegung $\mathcal{G}_{\tilde{\mathcal{F}}}$ - ermittelte PEARSON-Funktion betrachten. Zu den Momenten- und Parameterwerten dieser Funktion vergleiche man [5.2 - B 16], Schritt 2.

Intervall i	Emp. Häufigk. h_i	Approximationsschritt									
		$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$
1	1	0,3	2,48								
2	7	4,3									
3	43	56,5	3,23								
4	309	299,0	0,33								
5	425	411,3	0,46								
6	157	177,4	2,35								
7	58	51,0	0,95								
$\sum$ (= $\chi^2_{(k)}(\vartheta)$)			9,80								



LOEHNE 66, ZERLEGUNG G(G1)

VERGL. MIT 2. APPR.-FKT., G(F)

Zeichnung [5.2 - B17 - Z1]

BEISPIEL [5.2 - B18] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathcal{J}$) :
vgl. [5.2 - B 16]

Quelle : s.o.

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : s.o.

Stichprobenumfang (n) : s.o.

Zahl der Klassen (s) von $\mathcal{J}$: s.o.

Klassengrenzen (x_i) von $\mathcal{J}$: s.o.

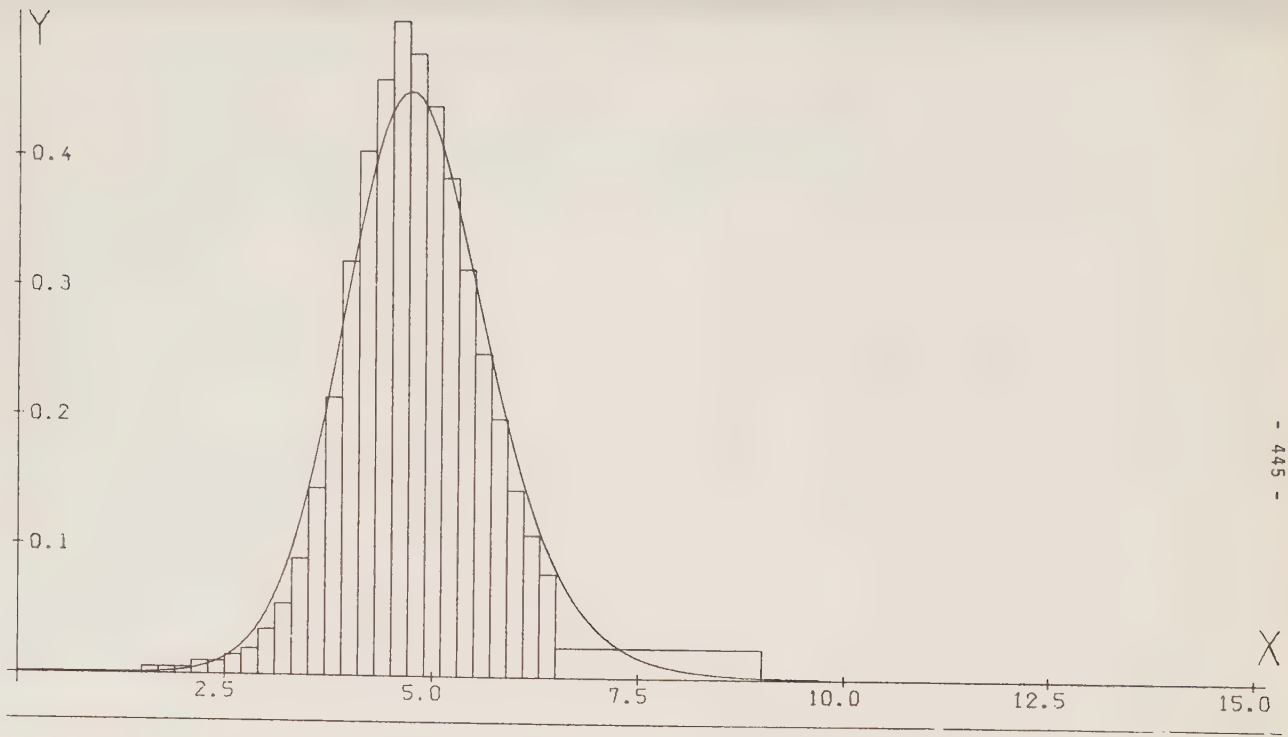
Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathcal{J}$ (Zerlegung $\mathcal{F}$) : s.o.

Bemerkungen :

In diesem Beispiel interessieren wir uns für den Wert unseres Abstandsmaßes $X^2_{(k)}(\mathcal{J})$, wenn wir als empirische Verteilung die in [5.2 - B 16] angegebene Bruttostundenlöhneverteilung mit Zerlegung $\mathcal{J}_F$ und als theoretische Verteilung die in [5.2 - B 15], Schritt 3 zur selben Verteilung - jedoch mit Zerlegung $\mathcal{J}_G$ - ermittelte PEARSON-Funktion betrachten. Zu den Momenten- und Parameterwerten dieser Funktion vergleich man [5.2 - B 15], Schritt 3.

Intervall i	Emp. Häufigk h_i	Approximationsschritt									
		$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
1	1	0,3	0,95								
2	1	0,2									
3	1	0,4									
4	1	0,7									
5	2	1,2									
6	2	2,0									
7	3	3,5									
8	4	6,0	1,46								
9	7	9,8									
10	11	15,6	1,34								
11	18	23,6	1,34								
12	29	34,1	0,77								
13	43	46,7	0,29								
14	64	60,2	0,25								
15	81	72,9	0,89								
16	92	83,1	0,96								
17	101	88,9	1,64								
18	96	89,7	0,44								
19	88	85,6	$6,85_{10}-2$								
20	77	77,5	$3,64_{10}-3$								

Fortsetzung		Approximationsschritt									
Intervall i	Emp. Häufigk h_i	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
21	63	67,1	0,25								
22	50	55,7	0,58								
23	40	44,6	0,48								
24	29	34,7	0,94								
25	22	26,3	0,72								
26	16	19,6	0,66								
27	58	49,9	1,30								
$\sum$ ($= X^2_{(k)}$ (9))			15,32								



Zeichnung [5.2 - B18 - Z1]

LOEHNE 66, ZERLEGUNG G(F)

VERGL. MIT 3. APPR.-FKT., G(G1)

BEISPIEL [5.2 - B 19] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathfrak{H}_{42}$) :
vgl. [5.2 - B 15]

Quelle : s.o.

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : s.o.

Stichprobenumfang (n) : s.o.

Zahl der Klassen (s) von $\mathfrak{H}_{42}$: s.o.

Klassengrenzen (x_i) von $\mathfrak{H}_{42}$:
$X_0 = -30$ [1], $X_1 = 1{,}5$, $X_2 = 2{,}5$, ..., $X_6 = 6{,}5$, $X_7 = 50$ [1]

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathfrak{H}$ (Zerlegung $\mathfrak{F}$) : s.o.

Bemerkungen :

Wie in [5.2 - B 15] wird hier versucht, zu der vorgegebenen Bruttostundenlöhneverteilung mit 7 Klassen, eine geeignete Approximationsfunktion aus dem PEARSON-System zu finden. Einziger Unterschied zu [5.2 - B 15] : Es wurden andere Randpunkte X_0 und X_s gewählt.

---

[1] angenommene Werte

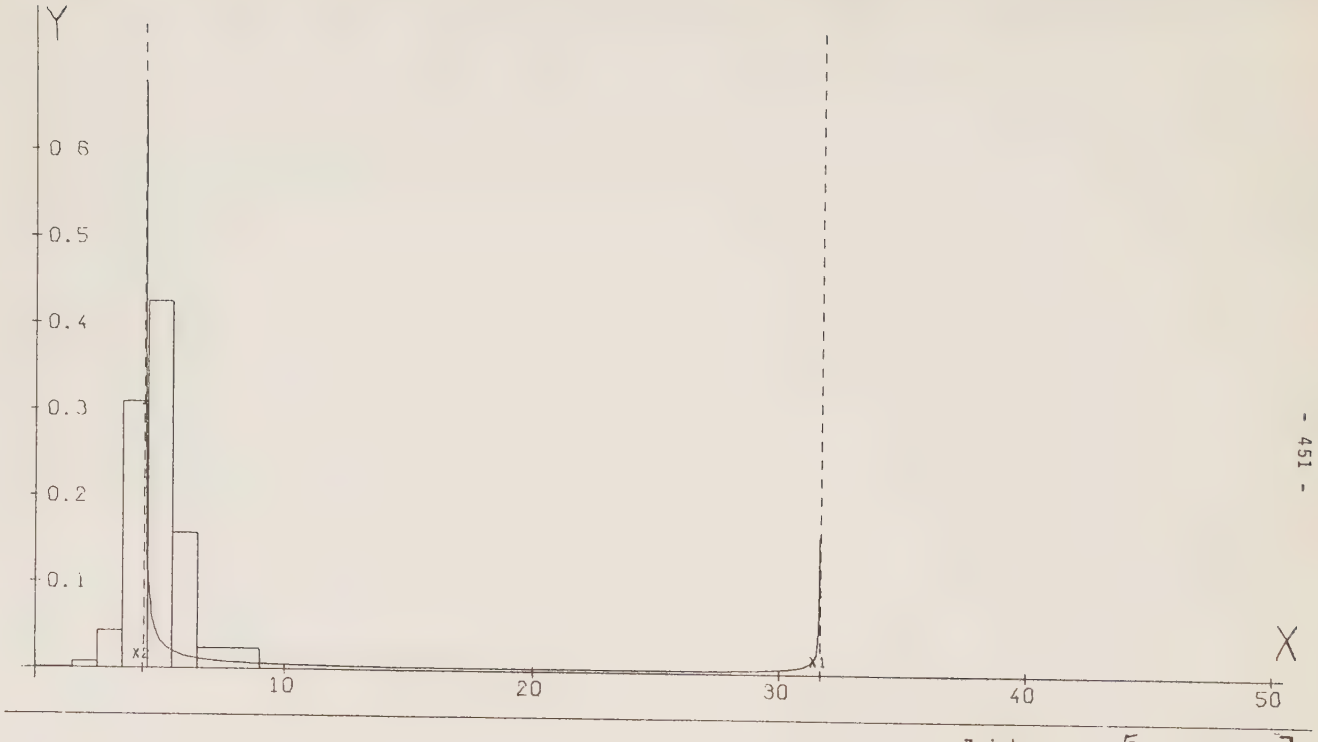
	Approximationsschritt				
	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	6,07	5,60	5,24	5,04	4,91
Standardabweichung ($\sigma = \sqrt{\mu_2}$)	5,59	4,18	2,94	2,09	1,56
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	3,54	4,57	5,59	4,26	0,23
PEARSONscher Koeffizient β_1 ($= \mu_3^{*2}$)	12,54	20,88	31,29	18,18	$5,30_{10}{}^{-2}$
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	14,53	27,61	57,14	77,76	91,55
PEARSONscher Koeffizient æ	- 3,23	- 7,62	14,57	1,22	$1,83_{10}{}^{-3}$
PEARSON-Typ	I (U)	I (J)	III (R;J)	III (R)	II
Zugehörige Parameterwerte :					
In Falle von Typ I / Typ II / Typ III					
x_2 / r / x_2	4,35	4,22	- 62,22	- 0,34	4,82
x_1 / q / x_1	31,65	50,58	4,04	2,85	2,25
s_2 / s / s_2	- 0,97	- 0,92	- 11,53	- 7,23	2,53
s_1 / ∂ / s_1	- 0,62	1,48	- 0,81	1,54	- 0,13
y^* / y^* / y^*	0,17	$2,10_{10}{}^{-4}$	$1,46_{10}{}^{20}$	$1,25_{10}{}^{4}$	20,35
Bemerkungen :					

	Approximationsschritt				
	k = 6	k = 7	k = 11	k = 12	
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	4,90	4,89	4,88	4,88	
Standardabweichung ($\sigma = \sqrt{\mu_2}$)	1,10	1,05	1,02	1,02	
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	1,50	1,45	1,14	1,10	
PEARSONscher Koeffizient β_1 ($= \mu_3^{*2}$)	2,24	2,11	1,29	1,22	
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	18,22	14,70	10,35	9,97	
PEARSONscher Koeffizient $\varkappa$	0,16	0,18	0,14	0,14	
PEARSON-Typ	II	II	II	II	
Zugehörige Parameterwerte :					
In Falle von Typ I / Typ II / Typ III					
x_2 / r / x_2	4,16	4,09	4,16	4,17	
x_1 / q / x_1	1,68	1,67	1,76	1,78	
s_2 / s / s_2	2,89	3,04	3,23	3,26	
s_1 / ν / s_1	-1,65	- 1,93	- 1,82	- 1,81	
y^* / y^* / y^*	7,60	7,99	14,84	16,16	
Bemerkungen :					

Intervall i	Emp. Häufigk. h_i	Approximationsschritt k = 1: $n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	k = 1: $X^2_{(k),i}$	k = 2: $n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	k = 2: $X^2_{(k),i}$	k = 3: $n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	k = 3: $X^2_{(k),i}$	k = 4: $n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	k = 4: $X^2_{(k),i}$	k = 5: $n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	k = 5: $X^2_{(k),i}$
1	1	0		0		0		0		17,3	} 31,51 (1–2)
2	7	0		0		0		0		28,9	
3	43	0		0		0		146,2		90,1	24,65
4	309	829,9 [1]		743,6 [1]		653,7		364,8		233,7	24,29
5	425	45,0		89,0		139,5		222,4		321,4	33,43
6	157	14,8		35,5		61,5		116,2		195,0	7,39
7	58	110,3		131,8		138,3		150,4		113,8	27,32
$\sum$											148,58
Zahl der Freiheitsgrade (F.G.)											1
χ^2 (α = 0,05;F.G.)											3,84

1) geschätzt

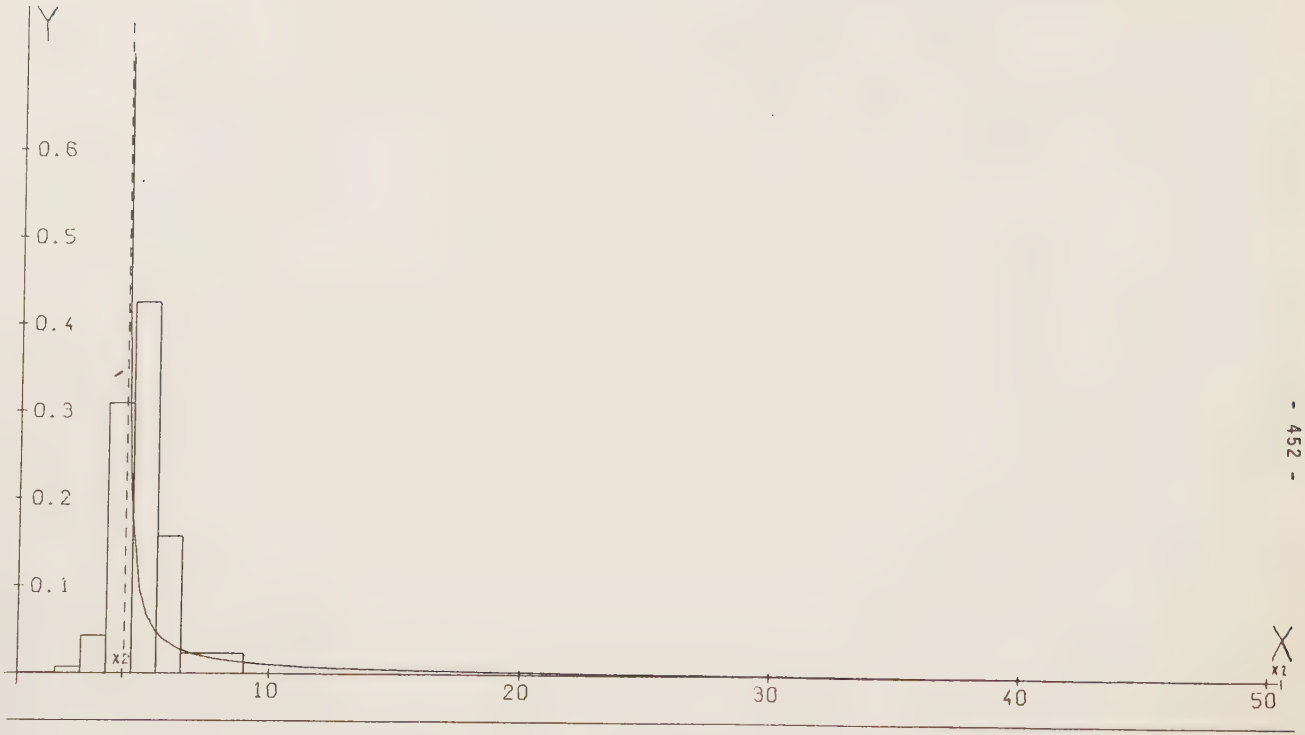
Fortsetzung		Approximationsschritt									
		k = 6		k = 7		k = 11		k = 12			
Intervall i	Emp. Häufigk. h_i	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
1	1	1,2	$9,23_{10}-2$	0,7	1,60	0,8	1,08	0,8	1,02		
2	7	6,0		4,4		4,8		4,8			
3	43	54,3	2,34	49,4	0,82	50,3	1,05	50,5	1,11		
4	309	307,2	$1,02_{10}-2$	314,6	$9,97_{10}-2$	307,3	$9,96_{10}-3$	306,4	$2,20_{10}-2$		
5	425	403,9	1,10	411,7	0,43	416,9	0,16	417,3	0,14		
6	157	160,1	$6,13_{10}-2$	156,8	$3,26_{10}-4$	161,1	0,11	161,7	0,14		
7	58	67,3	1,28	62,4	0,32	58,9	$1,27_{10}-2$	58,5	$4,63_{10}-3$		
Σ			4,89		3,27		2,42		2,43		
Zahl der Freiheitsgrade (F.G.)			1		1		1		1		
χ^2(α=0,05;F.G.)			3,84		3,84		3,84		3,84		



Zeichnung [5.2 - B19 - Z1]

LØEHNE 66, ZERLEGUNG G(G1)

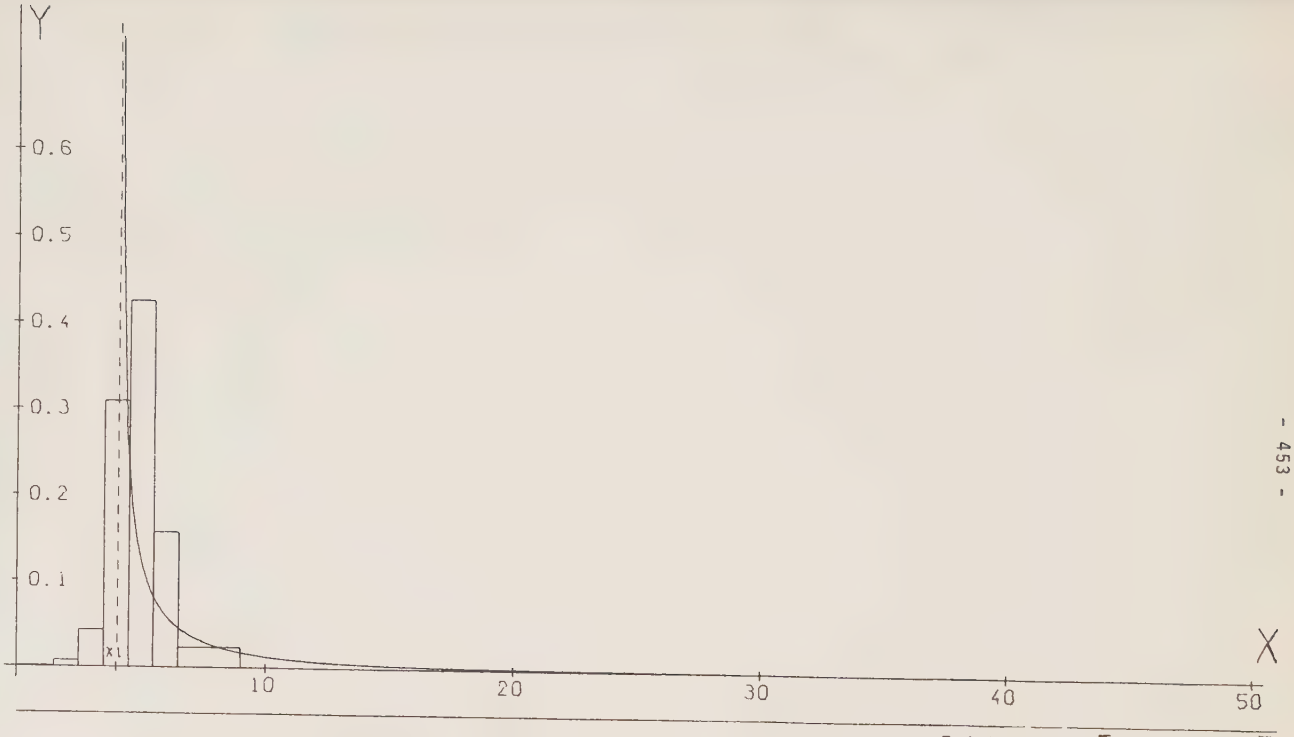
1. APPR.-FUNKTIØN ZU ZERLEGUNG G(G2)



Zeichnung [5.2 - B19 - Z2]

LØEHNE 66. ZERLEGUNG G(G1)

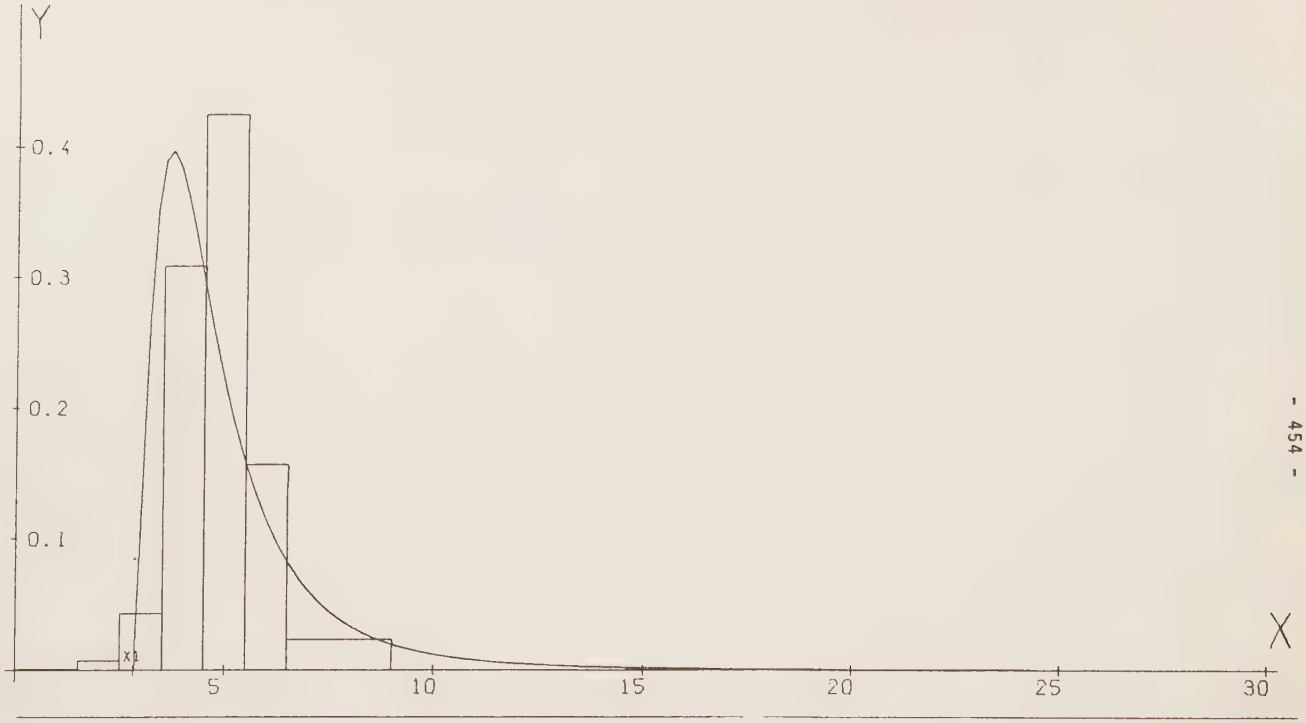
2. APPR.-FUNKTIØN ZU ZERLEGUNG G(G2)



Zeichnung [5.2 - B19 - Z3]

LØEHNE 66, ZERLEGUNG G(G1)

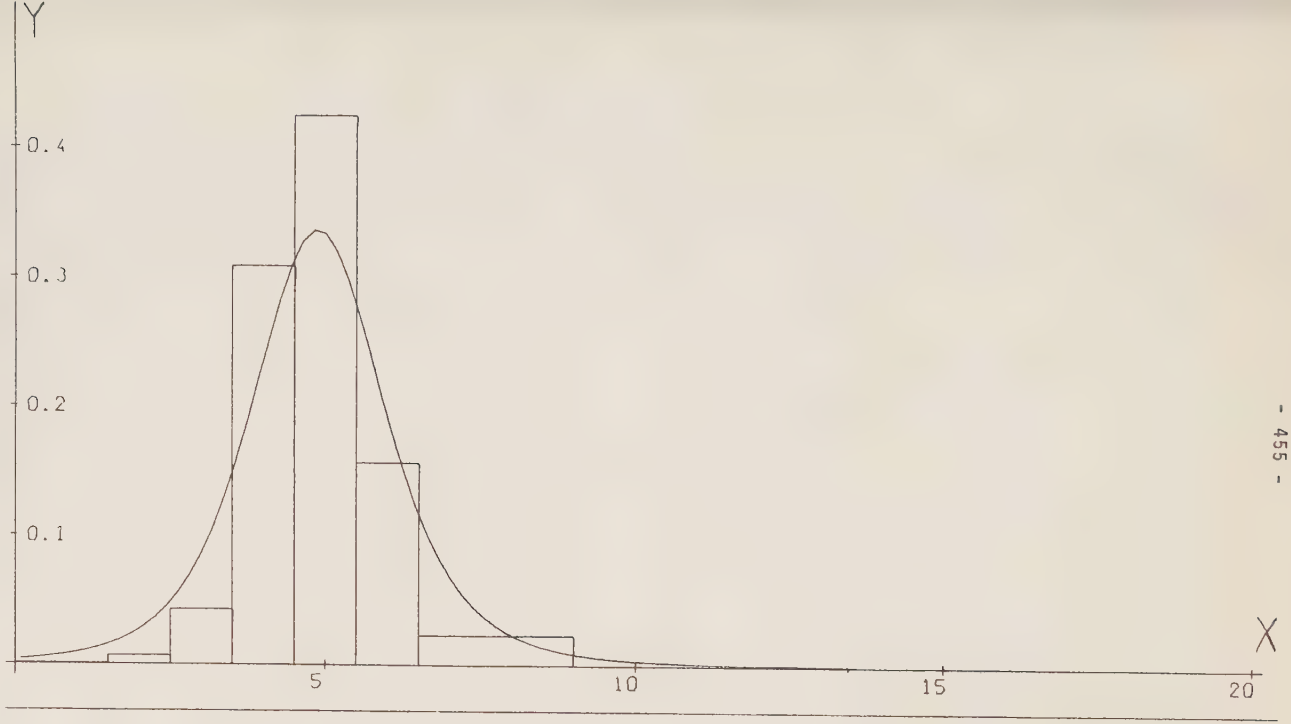
3. APPR.-FUNKTIØN ZU ZERLEGUNG G(G2)



Zeichnung [5.2 - B19 - Z4]

LØEHNE 66, ZERLEGUNG G(G1)

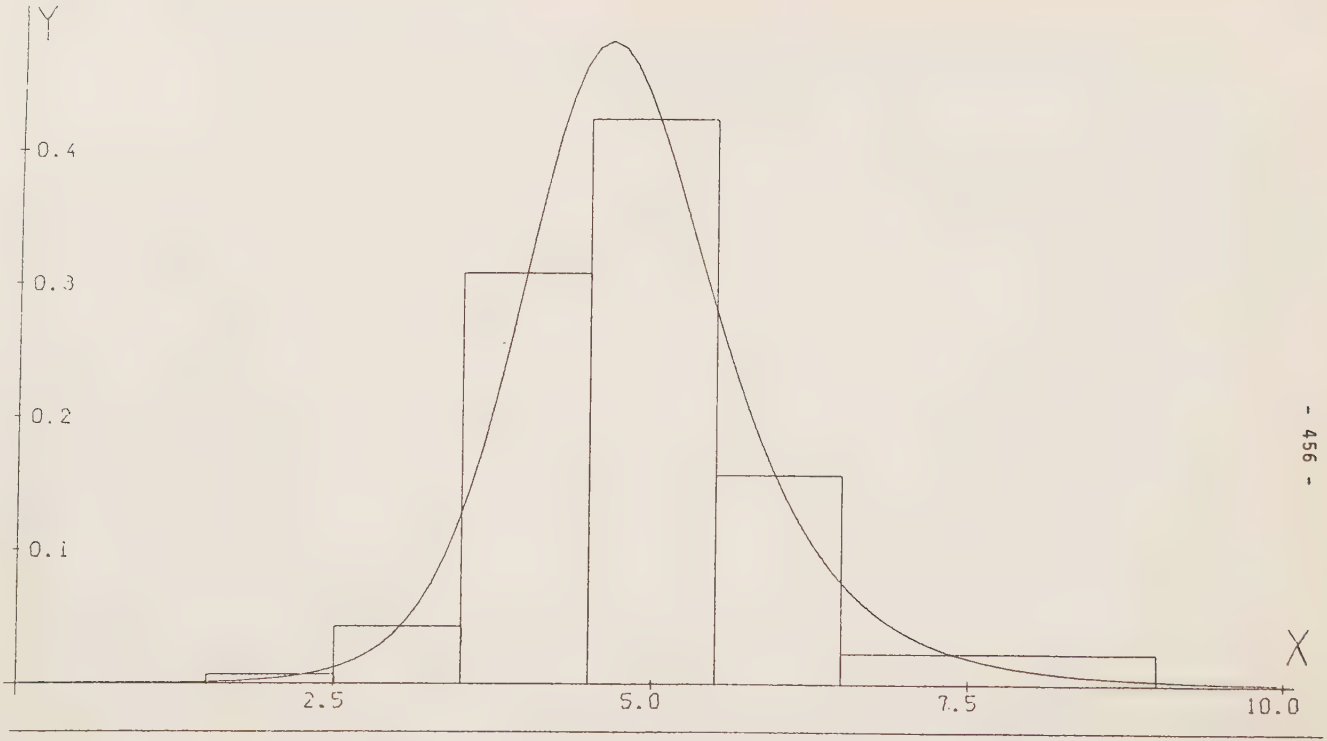
4. APPR.-FUNKTIØN ZU ZERLEGUNG G(G2)



Zeichnung [5.2 - B19 - Z5]

LOEHNE 66, ZERLEGUNG G(G1)

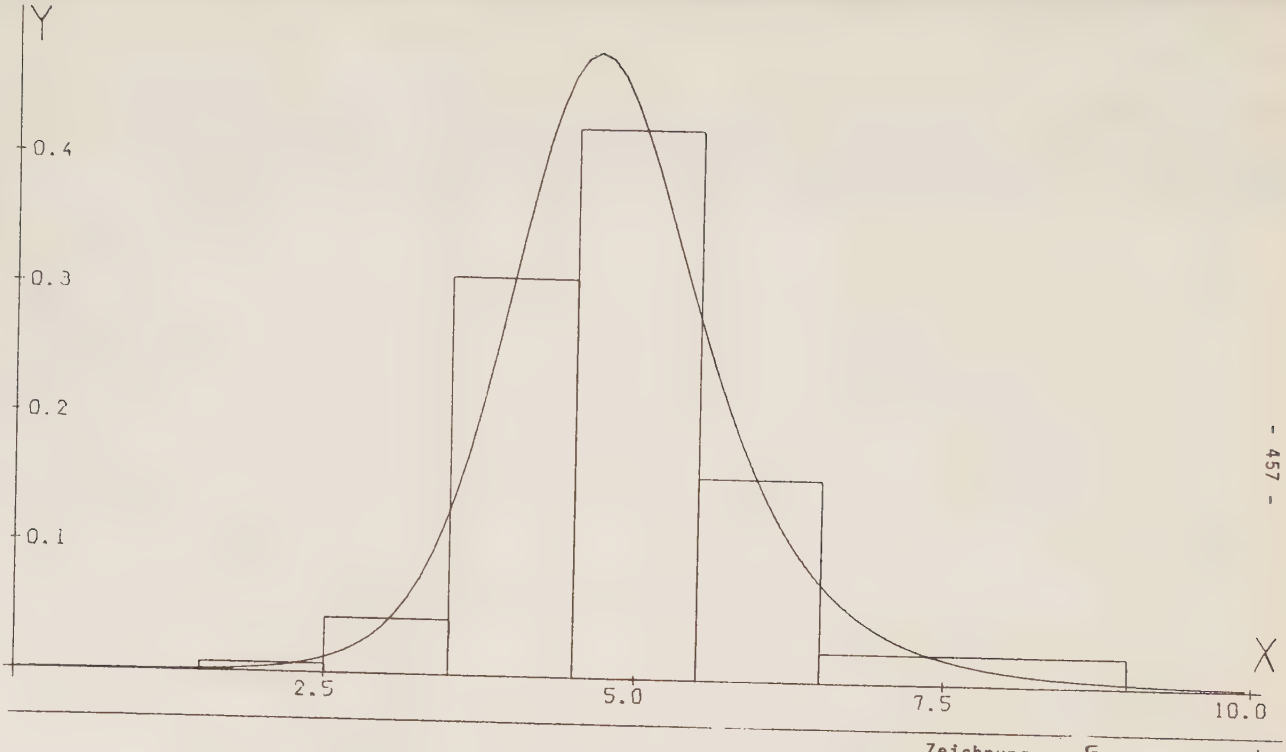
5. APPR.-FUNKTION ZU ZERLEGUNG G(G2)



Zeichnung [5.2 - B19 - Z6]

LOEHNE 66, ZERLEGUNG G(G1)

11. APPR.-FUNKTION ZU ZERLEGUNG G(G2)



Zeichnung [5.2 - B19 - Z7]

LOEHNE 66, ZERLEGUNG G(G1)

12. APPR.-FUNKTION ZU ZERLEGUNG G(G2)

BEISPIEL [5.2 - B 20] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathfrak{H}$) :

vgl. [5.2 - B 16]

Quelle : s.o.

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : s.o.

Stichprobenumfang (n) : s.o.

Zahl der Klassen (s) von $\mathfrak{H}$: s.o.

Klassengrenzen (x_i) von $\mathfrak{H}$: s.o.

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathfrak{H}$ (Zerlegung $\tilde{\mathfrak{F}}$) : s.o.

Bemerkungen :

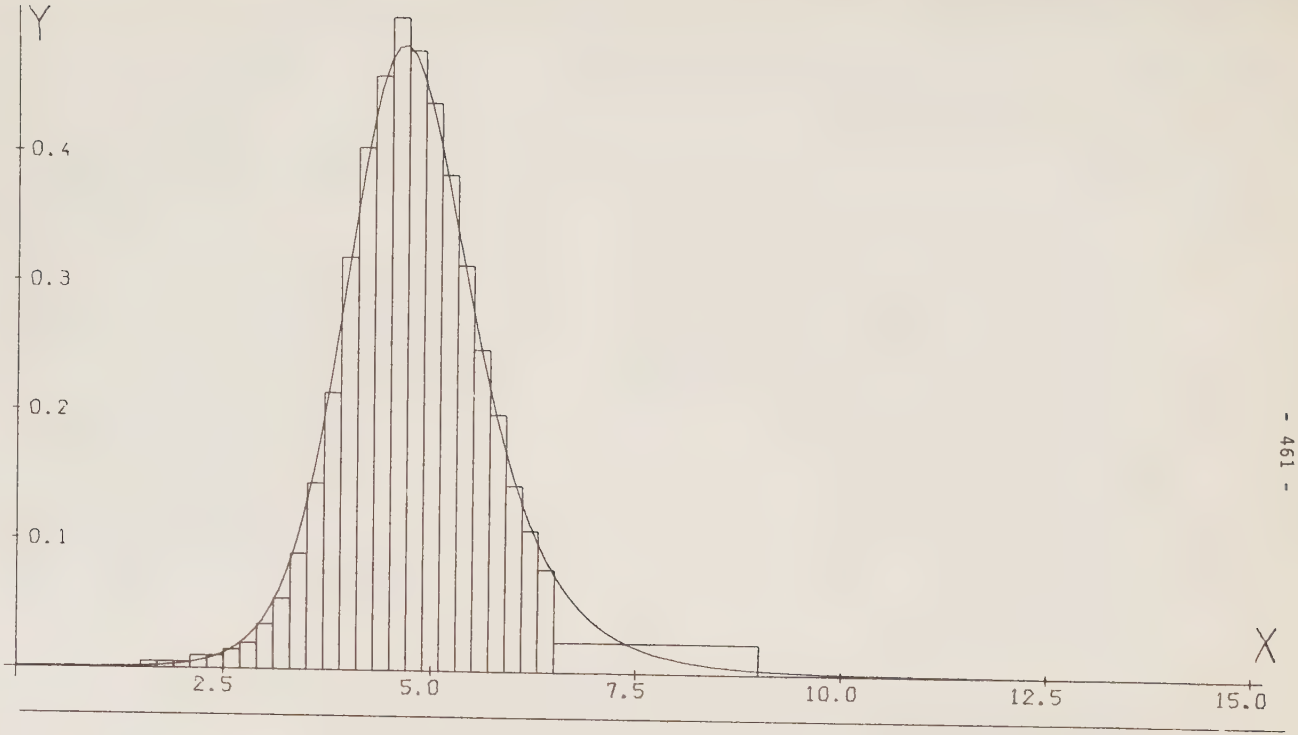
In diesem Beispiel interessieren wir uns für den Wert unseres Abstandsmaßes $X^2_{(k)}(\mathfrak{H})$, wenn wir als empirische Verteilung die in [5.2 - B 16] angegebene Bruttostundenlöhneverteilung mit Zerlegung $\mathfrak{H}_F$ und als theoretische Verteilung die in [5.2 - B 19] , Schritt zur selben Verteilung - jedoch mit Zerlegung $\mathfrak{H}_{G\,2}$ - ermittelte PEARSON-Funktion betrachten. Zu den Momenten- und Parameterwerten dieser Funktion vergleiche man [5.2 - B 19], Schritt 11.

Intervall i	Emp. Häufigk h_i	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
1	1	0,7	1,17								
2	1	0,3									
3	1	0,5									
4	1	0,8									
5	2	1,2									
6	2	1,9									
7	3	3,1	0,17								
8	4	5,1									
9	7	8,2	0,18								
10	11	13,2	0,36								
11	18	20,7	0,36								
12	29	31,5	0,20								
13	43	45,6	0,15								
14	64	61,9	$6,99_{10}-2$								
15	81	77,9	0,12								
16	92	90,3	$3,26_{10}-2$								
17	101	96,2	0,24								
18	96	94,8	$1,40_{10}-2$								
19	88	87,2	$6,70_{10}-3$								
20	77	75,8	$2,05_{10}-2$								

Fortsetzung

Intervall i	Emp. Häufigk h_i	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
21	63	62,9	$2{,}82_{10}{}^{-4}$								
22	50	50,4	$3{,}62_{10}{}^{-3}$								
23	40	39,5	$6{,}84_{10}{}^{-3}$								
24	29	30,4	$6{,}56_{10}{}^{-2}$								
25	22	23,2	$6{,}17_{10}{}^{-2}$								
26	16	17,6	0,15								
27	58	58,5 [1]	$6{,}00_{10}{}^{-3}$								
$\sum_{s^*}$ (= $X^2_{(\varphi)}$)			3,38								
			21								

1) einschließlich der sich hier bemerkbar machenden Beiträge außerhalb des angegebenen Definitionsbereiches der empirischen Verteilung



Zeichnung /5.2 - B20 - Z1/

LØEHNE 66, ZERLEGUNG G(F)

VERGL. MIT 11. APPR.-FKT, G(G2)

BEISPIEL [5.2 - B 21] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathfrak{H}$) :

Verteilung männlicher Arbeiter aus der gesamten Industrie der BRD nach der Höhe ihres Bruttostundenverdienstes (in DM) im Jahre 1972 (Promilleverteilung)

Quelle : [28], 6 A, S. 72*f

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : DM

Stichprobenumfang (n) : 1001

Zahl der Klassen (s) von $\mathfrak{H}$: 27

Klassengrenzen (x_i) von $\mathfrak{H}$:

$x_0 = 1{,}5$ [1], $x_1 = 2{,}7$, $x_2 = 3{,}1$, $x_3 = 3{,}5$, ..., $x_{26} = 12{,}7$, $x_{27} = 15$ [1]

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathfrak{H}$ (Zerlegung $\tilde{\mathfrak{F}}$) :

$n_1 = 72$, $n_2 = \ldots = n_{26} = 24$, $n_{27} = 100$

Bemerkungen :

---

[1] angenommene Werte

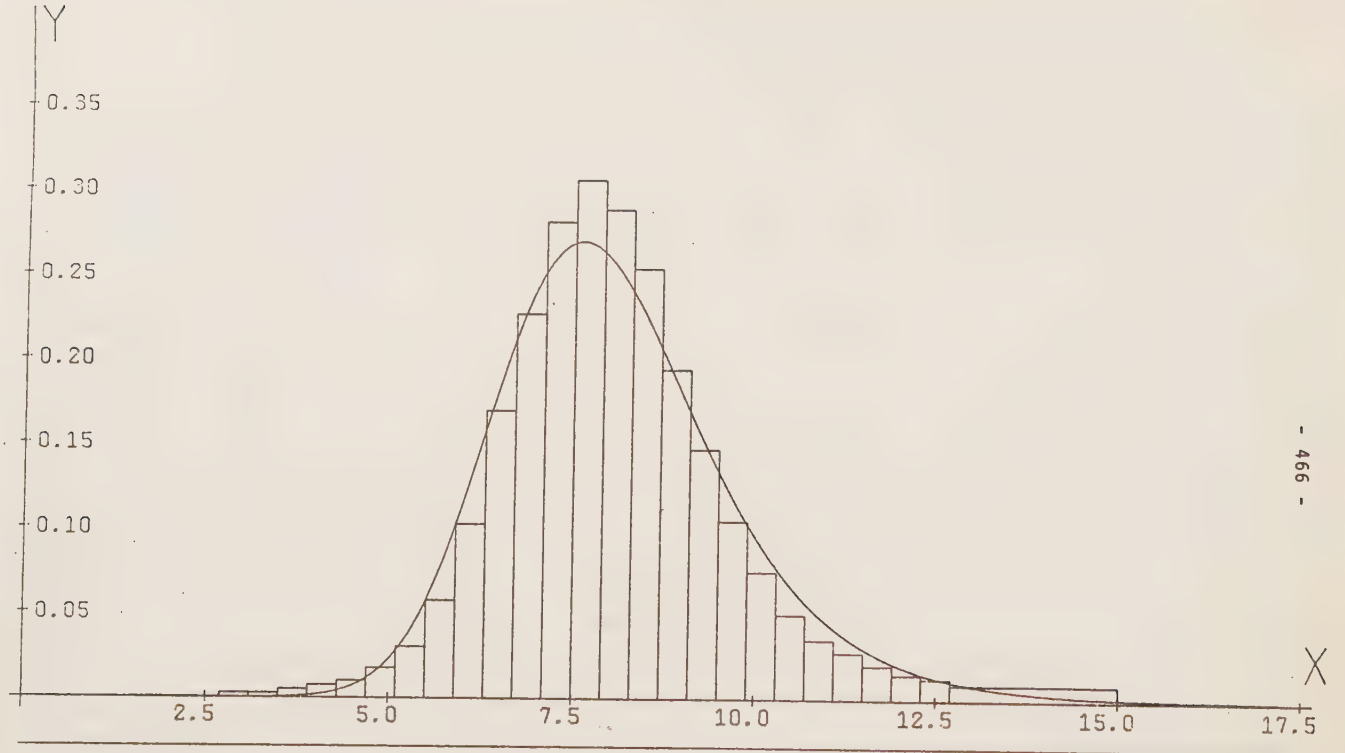
	Approximationsschritt				
	k = 1	k = 2	k = 4		
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	8,12	8,12	8,12		
Standardabweichung ($\sigma = \sqrt{\mu_2}$)	1,66	1,63	1,63		
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	0,87	0,82	0,82		
PEARSONscher Koeffizient β_1 ($= \mu_3^{*2}$)	0,79	0,68	0,67		
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	5,01	4,81	4,80		
PEARSONscher Koeffizient $\varkappa$	0,43	0,37	0,37		
PEARSON-Typ	II	II	II		
Zugehörige Parameterwerte :					
In Falle von					
Typ I / Typ II / Typ III					
x_2 / r / x_2	4,57	4,84	4,85		
x_1 / q / x_1	4,09	4,24	4,25		
s_2 / s / s_2	6,83	6,88	6,89		
s_1 / p / s_1	-10,13	- 9,10	- 9,04		
y^* / y^* / y^*	$1,94_{10}6$	$7,11_{10}6$	$7,85_{10}6$		
Bemerkungen :					

Intervall i	Emp. Häufigk h_i	Approximationsschritt k = 1		k = 2		k = 4					
		$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
1	0	(0)	3,17	(0)	2,41	(0)	2,34				
2	1	(0)		(0)		(0)					
3	1	0,1		0,1		0,1					
4	2	0,3		0,4		0,4					
5	3	1,0		1,2		1,2					
6	4	2,9		3,1		3,2					
7	7	7,5		7,6		7,7					
8	12	16,5	1,25	16,4	1,19	16,4	1,20				
9	23	31,5	2,31	30,9	2,01	30,9	2,01				
10	41	51,9	2,29	50,7	1,86	50,6	1,84				
11	68	74,2	0,52	72,9	0,33	72,8	0,32				
12	91	93,5	$6,93_{10}{}^{-2}$	92,7	$3,10_{10}{}^{-2}$	92,6	$2,79_{10}{}^{-2}$				
13	113	105,4	0,55	105,4	0,54	105,4	0,55				
14	123	107,9	2,11	108,8	1,85	108,8	1,85				
15	116	101,9	1,94	103,4	1,53	103,5	1,52				
16	102	90,2	1,55	91,8	1,14	91,8	1,12				
17	78	75,6	$7,37_{10}{}^{-2}$	77,0	$1,37_{10}{}^{-2}$	77,0	$1,17_{10}{}^{-2}$				
18	59	60,8	$5,39_{10}{}^{-2}$	61,7	0,12	61,8	0,13				
19	42	47,3	0,59	47,8	0,69	47,8	0,70				
20	30	35,8	0,95	35,9	0,98	36,0	0,99				

Fortsetzung

Intervall i	Emp. Häufigk h_i	Approximationsschritt k = 1		k = 2		k = 4					
		$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
21	20	26,6	1,66	26,5	1,58	26,5	1,59				
22	14	19,5	1,56	19,2	1,41	19,2	1,41				
23	11	14,2	0,70	13,8	0,56	13,8	0,55				
24	8	10,2	0,47	9,8	0,33	9,8	0,33				
25	6	7,3	0,23	6,9	0,13	6,9	0,12				
26	5	5,2	$9,28_{10^{-3}}$	4,9	} 5,30	4,9	} 5,41				
27	21	12,7 [1]	4,78	11,7 [1]		10,1					
Σ			26,84		24,01		24,00				
Zahl der Freiheitsgrade (F.G.)			16		15		15				
$\chi^2(\alpha = 0,05; \text{F.G.})$			26,30		25,00		25,00				

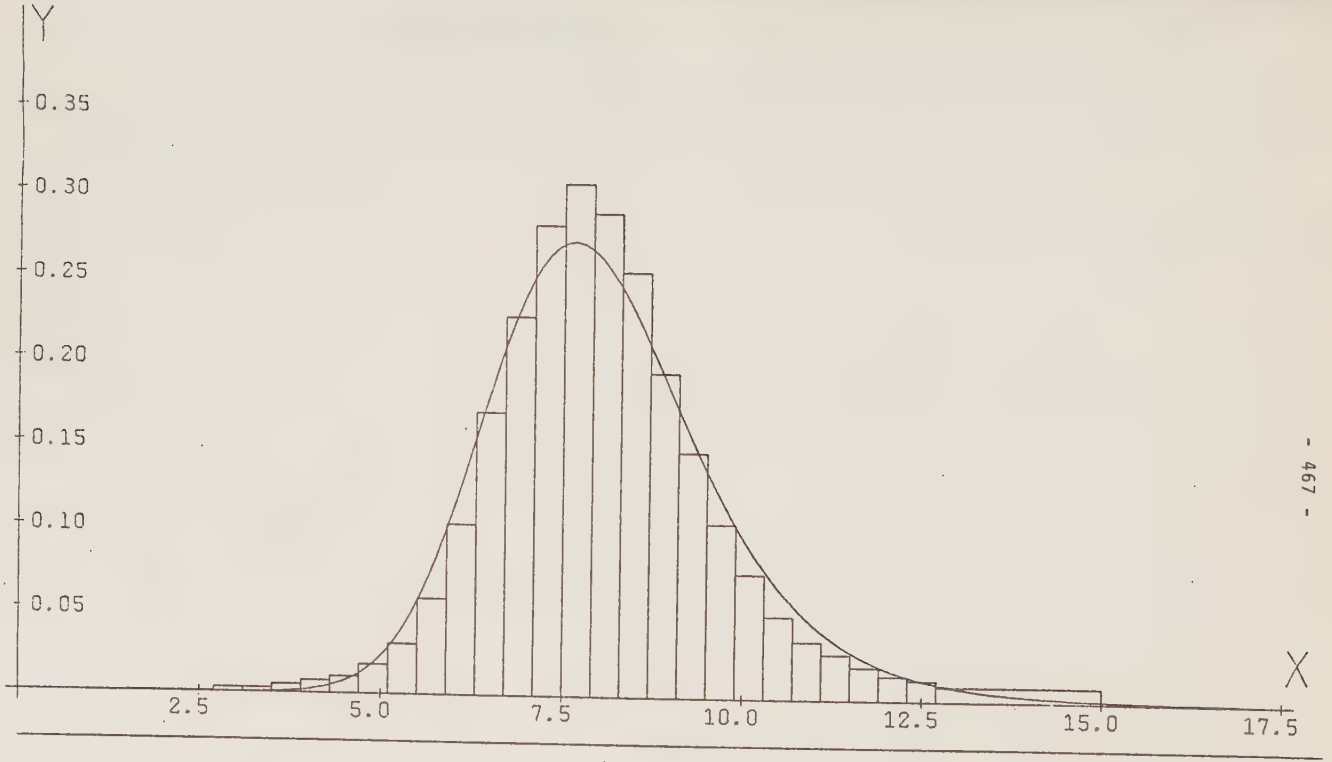
[1] Einschließlich der sich in diesem Beispiel bemerkbar machenden Beiträge außerhalb des angegebenen Definitionsbereiches der empirischen Verteilung



Zeichnung [5.2 - B21 - Z1]

EG-ERHEBUNG LØEHNE 1972, BRD, MAENNER

1. APPRØX.-SCHRITT



Zeichnung [5.2 - B21 - Z2]

EG-ERHEBUNG LOEHNE 1972, BRD, MAENNER

4. APPROX.-SCHRITT

BEISPIEL [5.2 - B 22] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathcal{G}$) :
vgl. [5.2 - B 21]

Quelle : s.o.

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : s.o.

Stichprobenumfang (n) : s.o.

Zahl der Klassen (s) von $\mathcal{G}$: s.o.

Klassengrenzen (x_i) von $\mathcal{G}$: s.o.

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathcal{G}$ (Zerlegung $\tilde{\mathcal{F}}$) : s.o.

Bemerkungen :
In diesem Beispiel wird eine Nachberechnung durchgeführt. Ausgehend von der - bzgl. unseres Abstandsmaßes $X^2_{(k)}$ ($\mathcal{G}$) - besten Approximationsfunktion, die wir in [5.2 - B 21] , Schritt 4 ermitteln konnten, untersuchen wir nun die Umgebung von $(\hat{\beta}_1^{(4)}, \hat{\beta}_2^{(4)})$ daraufhin, ob eventuell andere Wertekombinationen (β_1, β_2), die wir in diesem Beispiel anhand von (5.1 - 8)vorgeben, vielleicht zu noch besseren Approximationsfunktionen aus dem PEARSON-System für unsere betrachtete empirische Verteilung führen. Dabei dürfen wir daran erinnern, daß bei diesem Umgebungsabsuchen die Werte für den Mittelwert und die Standardabweichung aus [5.2 - B 21] festgehalten werden. Der Punkt $(\hat{\beta}_1^{(4)}, \hat{\beta}_2^{(4)})$ wird in diesem Beispiel mit $(\beta_1^{(1,0)}, \beta_2^{(1,0)})$ bezeichnet.

	Umgebungsabsuchen				
	l = 1	l = 2	l = 3	l = 4	l = 5
Angaben zum Ellipsenpunkt $P_{(1,0)}$:					
$\beta_1^{(1,0)}$	$6{,}68_{10}{}^{-1}$	$6{,}68_{10}{}^{-1}$	$8{,}45_{10}{}^{-1}$	1,02	1,02
$\beta_2^{(1,0)}$	4,80	5,80	6,51	7,21	8,21
$X^2_{(1,0)}(\vartheta)$	24,00	15,78	12,62	10,65	9,477
$s^*_{(1,0)}$	20	21	21	21	21
Hauptradius $r_{1,(1)}$	$2{,}50_{10}{}^{-1}$	$2{,}50_{10}{}^{-1}$	$2{,}50_{10}{}^{-1}$	$2{,}50_{10}{}^{-1}$	$2{,}50_{10}{}^{-1}$
Nebenradius $r_{2,(1)}$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Betrachtete Ellipsenpunkte :	$X^2_{(1,j)}(\vartheta)$-Werte [1]				
$P_{(1,1)}$	15,78 [2]	13,91	11,23	9,477	9,25
$P_{(1,2)}$	22,34 [2]	12,62	10,65	9,483	7,87
$P_{(1,3)}$	(A.O. bei ϑ^*) [4]	20,44	17,30	15,53	9,18
$P_{(1,4)}$	94,55	28,29	20,82	17,52	11,19
$P_{(1,5)}$	65,38	24,00 [3]	22,34	18,40	10,65
$P_{(1,6)}$	34,36	20,95	15,78	12,62	11,23
$P_{(1,7)}$	24,06	20,43	15,40	12,20	12,10
$P_{(1,8)}$	19,50	17,72	13,69	11,03	11,30

Bemerkungen : 1) vgl. (5.1-8)

2) $s^* = 21$
3) $s^* = 20$
4) Berechnung abgebrochen wegen arithmetic overflow

(Zu Beispiel [5.2-B22])

	Umgebungsabsuchen				
	$l = 6$	$l = 7$	$l = 8$	$l = 9$	$l = 10$
Angaben zum Ellipsenpunkt $P_{(l,0)}$:					
$\beta_1^{(l,0)}$	1,20	1,38	1,55	1,55	1,73
$\beta_2^{(l,0)}$	8,92	9,63	10,34	11,34	12,04
$x^2_{(l,0)}(g)$	7,87	7,17	6,87	6,37	6,18
$s^*_{(l,0)}$	21	21	21	21	21
Hauptradius $r_{1,(l)}$	$2{,}50_{10}{}^{-1}$	$2{,}50_{10}{}^{-1}$	$2{,}50_{10}{}^{-1}$	$2{,}50_{10}{}^{-1}$	$2{,}50_{10}{}^{-1}$
Nebenradius $r_{2,(l)}$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	$x^2_{(l,j)}(g)$-Werte[1]				
Betrachtete Ellipsenpunkte :					
$P_{(l,1)}$	7,99	7,19	6,37	6,68	6,06
$P_{(l,2)}$	7,17	6,87	6,89	6,18	6,26
$P_{(l,3)}$	8,78	8,79	9,15	6,99	7,40
$P_{(l,4)}$	10,53	10,37	10,63	7,51	7,92
$P_{(l,5)}$	9,48	8,89	8,74	6,87	6,89
$P_{(l,6)}$	9,48	7,87	7,17	7,19	6,37
$P_{(l,7)}$	9,93	8,45	7,47	7,65	6,89
$P_{(l,8)}$	9,39	8,06	7,18	7,44	6,75

Bemerkungen : 1) vgl. (5.1-8)

(Zu Beispiel [5.2-B22])

	Umgebungsabsuchen				
	l = 11	l = 12	l = 13	l = 14	l = 15
Angaben zum Ellipsenpunkt $P_{(1,0)}$:					
$\beta_1^{(1,0)}$	1,73	1,91	1,91	1,91	1,91
$\beta_2^{(1,0)}$	13,04	13,75	13,75	14,25	14,25
$x^2_{(1,0)}(\varphi)$	6,06	5,96	5,96	5,94	5,94
$s^*_{(1,0)}$	21	21	21	21	21
Hauptradius $r_{1,(1)}$	0,25	0,25	$1,25_{10}{}^{-1}$	$1,25_{10}{}^{-1}$	$6,25_{10}{}^{-1}$
Nebenradius $r_{2,(1)}$	1,00	1,00	0,50	0,50	0,25
Betrachtete Ellipsenpunkte :	$x^2_{(1,j)}(\varphi)$-Werte[1]				
$P_{(1,1)}$	6,44	5,97	5,94	5,97	5,95
$P_{(1,2)}$	5,96	6,10	6,00	5,94	5,93
$P_{(1,3)}$	6,37	6,80	6,20	6,04	5,95
$P_{(1,4)}$	6,54	6,97	6,23	6,05	5,96
$P_{(1,5)}$	6,18	6,26	6,06	5,96	5,94
$P_{(1,6)}$	6,68	6,06	5,98	6,00	5,96
$P_{(1,7)}$	7,20	6,61	6,04	6,36	6,00
$P_{(1,8)}$	7,07	6,54	6,02	6,34	5,99

Bemerkungen : 1) vgl. (5.1-8)

(Zu Beispiel [5.2-B2])

	Umgebungsabsuchen				
	l = 16	l = 17	l = 18	l =	l =
Angaben zum Ellipsenpunkt $P_{(l,0)}$:					
$\beta_1^{(l,0)}$	1,95	1,95	1,95		
$\beta_2^{(l,0)}$	14,43	14,43	14,55		
$X^2_{(l,0)}(\varphi)$	5,9312	5,9312	5,929		
$s^*_{(l,0)}$	21	21	21		
Hauptradius $r_{1,(l)}$	$6,25_{10}{}^{-2}$	$3,125_{10}{}^{-2}$	$3,125_{10}{}^{-2}$		
Nebenradius $r_{2,(l)}$	0,25	$1,25_{10}{}^{-1}$	$1,25_{10}{}^{-1}$		
Betrachtete Ellipsenpunkte :	$X^2_{(l,j)}(\varphi)$-Werte[1]				
$P_{(l,1)}$	5,9317	5,929	5,932		
$P_{(l,2)}$	5,939	5,933	5,929		
$P_{(l,3)}$	5,977	5,943	5,935		
$P_{(l,4)}$	5,980	5,945	5,936		
$P_{(l,5)}$	5,945	5,935	5,931		
$P_{(l,6)}$	5,937	5,933	5,933		
$P_{(l,7)}$	5,960	5,936	5,943		
$P_{(l,8)}$	5,958	5,935	5,941		

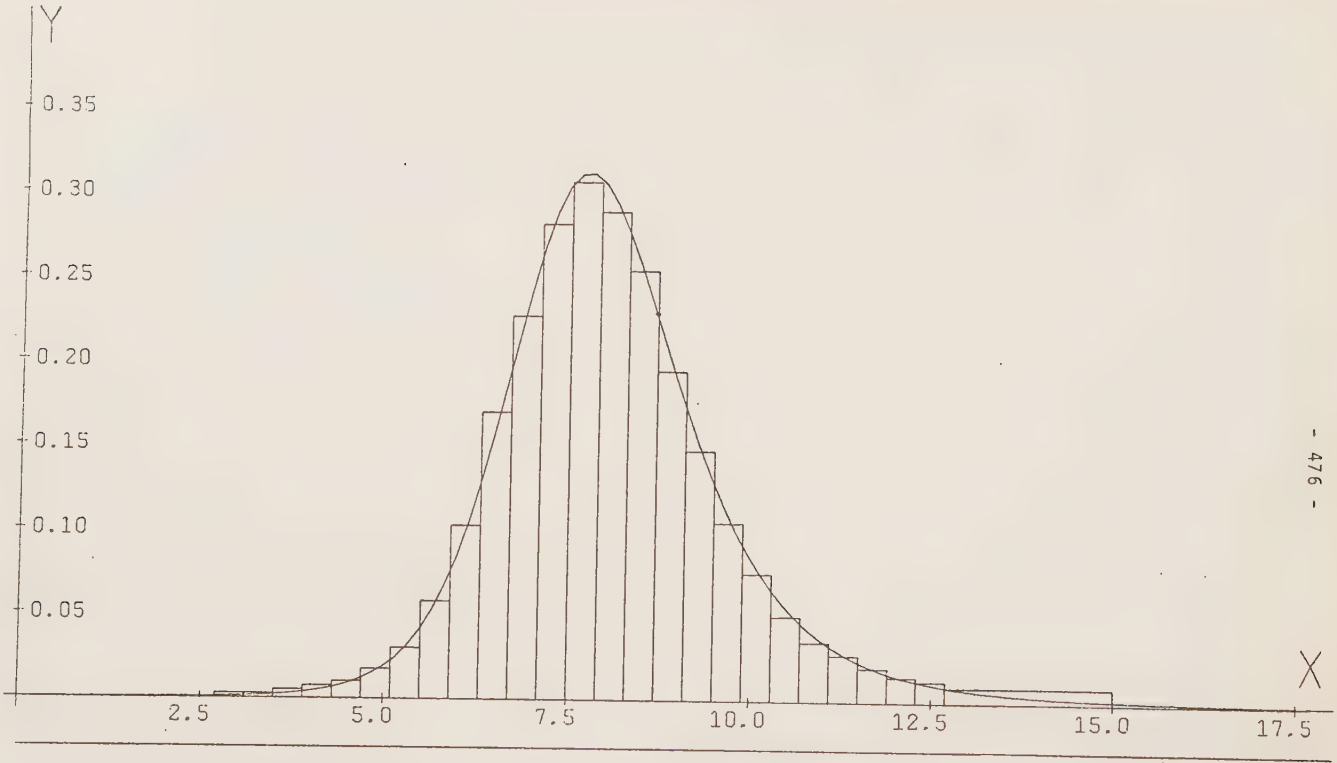
Bemerkungen : 1) vgl. (5.1-8)

	i = 17, j = 1				
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	8,12				
Standardabweichung ($\sigma = \sqrt{\mu_2}$)	1,63				
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	1,40				
PEARSONscher Koeffizient β_1 ($= \mu_3^{*2}$)	1,95				
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	14,55				
PEARSONscher Koeffizient $\varkappa$	0,17				
PEARSON-Typ	II				
Zugehörige Parameterwerte :					
In Falle von Typ I / Typ II / Typ III					
x_2 / r / x_2	6,96				
x_1 / q / x_1	2,60				
s_2 / s / s_2	3,02				
s_1 / p / s_1	- 1,80				
y^* / y^* / y^*	76,15				
Bemerkungen :					

Intervall i	Emp. Häufigk h_i	l = 17, j = 1									
		$n \cdot \tilde{\pi}_{(l,j),i}$	$\chi^2_{(l,j),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$
1	0	0,5	0,90								
2	1	0,4									
3	1	0,6									
4	2	1,1									
5	3	2,0									
6	4	3,6									
7	7	6,7	$1{,}03_{10}{}^{-2}$								
8	12	12,5	$2{,}32_{10}{}^{-2}$								
9	23	22,9	$2{,}07_{10}{}^{-4}$								
10	41	40,0	$2{,}47_{10}{}^{-2}$								
11	68	64,3	0,21								
12	91	92,1	$1{,}41_{10}{}^{-2}$								
13	113	115,1	$3{,}66_{10}{}^{-2}$								
14	123	124,6	$1{,}99_{10}{}^{-2}$								
15	116	118,4	$4{,}95_{10}{}^{-2}$								

(Zu BEISPIEL [5.2 - B22])

Fortsetzung		l = 17, j = 1									
Intervall i	Emp. Häufigk h_i	$n \cdot \tilde{\pi}_{(l,j),i}$	$X^2_{(l,j),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
16	102	101,2	$5{,}91_{10^{-3}}$								
17	78	80,0	$4{,}95_{10^{-2}}$								
18	59	59,9	$1{,}47_{10^{-2}}$								
19	42	43,5	0,50								
20	30	31,0	$3{,}17_{10^{-2}}$								
21	20	21,9	0,17								
22	14	15,5	0,15								
23	11	11,1	$3{,}74_{10^{-4}}$								
24	8	7,9	$5{,}01_{10^{-4}}$								
25	6	5,7	$1{,}11_{10^{-2}}$								
26	5	4,2	} 4,15								
27	21	10,2									
$\Sigma (= X^2_{(l,j)}(g))$			5,93								
s^*			21								



Zeichnung [5.2 - B22 - Z1]

EG-ERHEBUNG LOEHNE 1972, BRD, MAENNER

17.1. APPROX.-SCHRITT

BEISPIEL [5.2 - B 23] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathcal{J}$) :

vgl. [5.2 - B 12]

Quelle : s.o.

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : s.o.

Stichprobenumfang (n) : s.o.

Zahl der Klassen (s) von $\mathcal{J}$: s.o.

Klassengrenzen (x_i) von $\mathcal{J}$: s.o.

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathcal{J}$ (Zerlegung $\tilde{\mathcal{F}}$) : s.o.

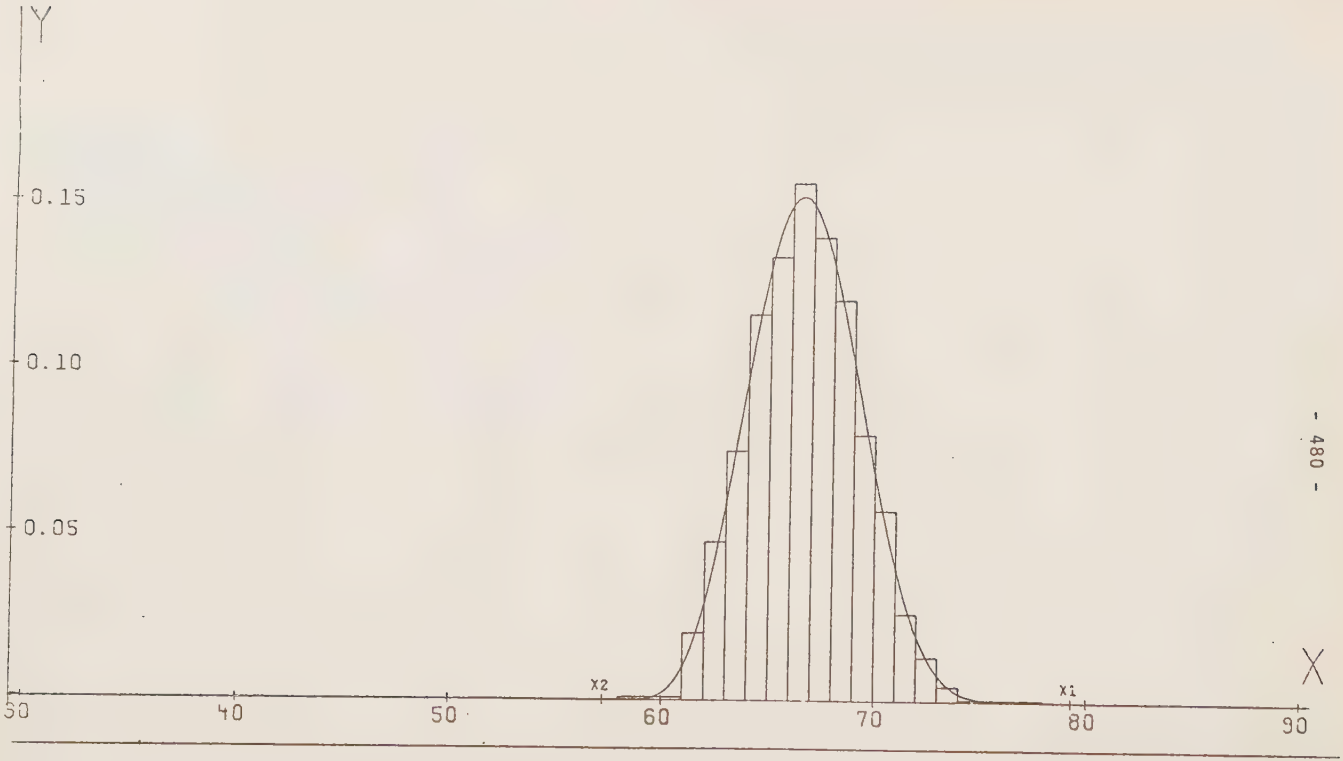
Bemerkungen :

Im [5.2 - B 12] versuchten wir vergeblich, zu unserer Körpergrößenverteilung IV eine im Sinne von (5.1 - 4a) akzeptable Approximationsfunktion zu finden. Deshalb wird nun eine Nachberechnung durchgeführt, wie sie in 5.1., Formel (5.1 - 6) beschrieben ist. Für einen Startversuch ("99"Schritt) wurden aufgrund der Momentenwerte des 8. und 9. Schritts Momentenwerte vorgegeben, indem für V_2 der Wert 0,99, für V_3 der Wert 0,98 und für V_4 der Wert 0,95 angesetzt wurde.

Diese Funktion war Ausgangspunkt für einen neuen Approximationsversuch mit Hilfe der modifizierten, mehrstufigen Momentenmethode.

	Approximationsschritt				
	k = "99"	k = "100"	k = "106"		
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	66,70	66,70	66,70		
Standardabweichung ($\sigma = \sqrt{\mu_2}$)	2,51	2,52	2,53		
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	0,12	0,13	0,13		
PEARSONscher Koeffizient β_1 (= μ_3^{*2})	$1,58_{10}-2$	$1,61_{10}-2$	$1,60_{10}-2$		
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	2,73	2,80	2,82		
PEARSONscher Koeffizient αe	$-2,06_{10}-2$	$-2,67_{10}-2$	$-2,97_{10}-2$		
PEARSON-Typ	I	I	I		
Zugehörige Parameterwerte :					
In Falle von Typ I / Typ II / Typ III					
x_2 / r / x_2	57,24	56,08	55,49		
x_1 / q / x_1	79,30	81,42	82,50		
s_2 / s / s_2	6,66	8,87	10,10		
s_1 / γ / s_1	9,19	12,67	14,64		
y^* / y^* / y^*	$3,74_{10}-18$	$1,93_{10}-25$	$1,07_{10}-29$		
Bemerkungen :					

Intervall i	Emp. Häufigk. h_i	Approximationsschritt k = "99" $n \cdot \tilde{\pi}_{(1,j),i}$	$\chi^2_{(1,j),i}$	k = "100" $n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	k = "106" $n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$\chi^2_{(k),i}$
1	21	(0)	26,63	0,1	43,38	0,2	49,60				
2	75	161,6		185,6		194,0					
3	526	478,5	4,72	483,4	3,75	483,7	3,69				
4	1237	1124,6	11,22	111,1	14,39	1103,6	16,12				
5	1947	2020,9	2,70	1996,3	1,22	1985,8	0,76				
6	3019	2959,3	1,20	2944,7	1,87	2939,2	2,17				
7	3475	3666,1	9,97	3673,3	10,70	3677,7	11,17				
8	4054	3927,8	4,06	3948,5	2,82	3559,9	2,25				
9	3631	3683,1	0,74	3698,5	1,23	3707,5	1,58				
10	3133	3036,3	3,08	3034,2	3,22	3035,5	3,13				
11	2075	2196,5	6,72	2180,5	5,10	2174,9	4,59				
12	1485	1382,7	7,57	1366,0	10,37	1358,9	11,70				
13	680	745,5	5,75	738,6	4,65	734,5	4,04				
14	343	335,3	0,18	339,1	$4,57_{10^{-2}}$	338,9	$4,97_{10^{-2}}$				
15	118	120,7	1,86	128,9	$1,45_{10^{-2}}$	130,9	1,26				
16	59	39		496,8		53,2	0,63				
			86,38		102,75		112,74				
Zahl der Freiheitsgrade (F.G.)			9		9		10				
$\chi^2(\alpha = 0,05;$ F.G.)			16,92		16,92		18,31				



Zeichnung [5.2 - B23 - Z1]

KOERPERGROESSENVERTEILUNG IV

(INCH-KLASSEN),"99". APPROXIMATIONSSCHRITT

BEISPIEL [5.2 - B 24] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathcal{J}$) :
vgl. [5.2 - B 12, 23]

Quelle : s.o.

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : s.o.

Stichprobenumfang (n) : s.o.

Zahl der Klassen (s) von $\mathcal{J}$: s.o.

Klassengrenzen (x_i) von $\mathcal{J}$: s.o.

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathcal{J}$ (Zerlegung $\tilde{\mathcal{F}}$) : s.o.

Bemerkungen :
Analog zu [5.2 - B 22] versuchen wir nun mit der in (5.1 - 8) beschriebenen Vorgehensweise zu unserer Körpergrößenverteilung IV noch eine bessere Approximationsfunktion aus dem PEARSON-System zu finden. Ausgangspunkt dieser "Umgebungsabsuche" ist die Funktion aus dem "99." Schritt von [5.2 - B 23].

	Umgebungsabsuchen				
	l = 1	l = 2	l = 3	l = 4	l = 5
Angaben zum Ellipsenpunkt $P_{(1,0)}$:					
$\beta_1^{(1,0)}$	$1{,}58_{10}{-2}$	$1{,}58_{10}{-2}$	$1{,}58_{10}{-2}$	$1{,}58_{10}{-2}$	$1{,}58_{10}{-2}$
$\beta_2^{(1,0)}$	2,73	2,73	2,73	2,73	2,61
$\chi^2_{(1,0)}(q)$	$8{,}64_{10}1$	$8{,}64_{10}1$	$8{,}64_{10}1$	$8{,}64_{10}1$	$7{,}84_{10}1$
$s^*_{(1,0)}$	15	15	15	15	13
Hauptradius $r_{1,(1)}$	0,50	0,25	$1{,}25_{10}{-1}$	$6{,}25_{10}{-2}$	$6{,}25_{10}{-2}$
Nebenradius $r_{2,(1)}$	1,00	0,50	0,25	$1{,}25_{10}{-1}$	$1{,}25_{10}{-1}$
Betrachtete Ellipsenpunkte :	$\chi^2_{(1,j)}(q)$-Werte[1]				
$P_{(1,1)}$	$5{,}84_{10}2$	$3{,}14_{10}2$	(A.O.bei y[7])	$1{,}26_{10}2$ [2]	$8{,}64_{10}1$ [2]
$P_{(1,2)}$	$1{,}39_{10}3$ [2]	$5{,}39_{10}2$ [2]	$2{,}35_{10}2$ [2]	$1{,}18_{10}2$ [2]	$1{,}54_{10}2$ [2]
$P_{(1,3)}$	$1{,}56_{10}3$ [4]	$1{,}32_{10}3$ [3]	$7{,}61_{10}2$ [2]	$2{,}10_{10}2$ [2]	$3{,}67_{10}2$ [2]
$P_{(1,4)}$	$5{,}87_{10}3$ [6]	$2{,}11_{10}3$ [4]	$9{,}55_{10}2$ [2]	$1{,}93_{10}2$ [2]	$3{,}62_{10}2$
$P_{(1,5)}$	$5{,}33_{10}3$ [5]	$7{,}90_{10}2$ [4]	$1{,}92_{10}2$ [3]	$7{,}84_{10}1$ [3]	$1{,}92_{10}2$
$P_{(1,6)}$	($\beta_1 < 0$)	($\beta_1 < 0$)	($\beta_1 < 0$)	($\beta_1 < 0$)	($\beta_1 < 0$)
$P_{(1,7)}$	($\beta_1 < 0$)	($\beta_1 < 0$)	($\beta_1 < 0$)	($\beta_1 < 0$)	($\beta_1 < 0$)
$P_{(1,8)}$	($\beta_1 < 0$)	($\beta_1 < 0$)	($\beta_1 < 0$)	($\beta_1 < 0$)	($\beta_1 < 0$)

Bemerkungen : 1) vgl. (5.1-8)
2) $s^* = 14$
3) $s^* = 13$
4) $s^* = 12$
5) $s^* = 10$
6) $s^* = 9$
7) Berechnung abgebrochen wegen arithmetic overflow

Fortsetzung	Umgebungsabsuchen				
	l = 6	l = 7	l = 8	l = 9	l = 10
Angaben zum Ellipsenpunkt $P_{(l,0)}$:					
$\beta_1^{(l,0)}$	$1{,}58_{10}{-2}$	$1{,}58_{10}{-2}$	$1{,}58_{10}{-2}$	$1{,}58_{10}{-2}$	$2{,}13_{10}{-2}$
$\beta_2^{(l,0)}$	2,61	2,61	2,61	2,63	2,64
$\chi^2_{(l,0)}(\vartheta)$	$7{,}84_{10}1$	$7{,}84_{10}1$	$7{,}84_{10}1$	$7{,}22_{10}1$	$7{,}04_{10}1$
$s^*_{(l,0)}$	13	13	13	13	13
Hauptradius $r_{1,(l)}$	$3{,}13_{10}{-2}$	$1{,}56_{10}{-2}$	$7{,}81_{10}{-3}$	$7{,}81_{10}{-3}$	$7{,}81_{10}{-3}$
Nebenradius $r_{2,(l)}$	$6{,}25_{10}{-2}$	$3{,}13_{10}{-2}$	$1{,}56_{10}{-2}$	$1{,}56_{10}{-2}$	$1{,}56_{10}{-2}$
Betrachtete Ellipsenpunkte :	$\chi^2_{(l,j)}(\vartheta)$-Werte[1]				
$P_{(l,1)}$	$7{,}88_{10}1$ [2]	$8{,}00_{10}1$ [2]	$7{,}22_{10}1$	$8{,}00_{10}1$	$6{,}59_{10}1$
$P_{(l,2)}$	$1{,}08_{10}2$ [2]	$7{,}90_{10}1$	$7{,}59_{10}1$	$7{,}04_{10}1$	$7{,}37_{10}1$
$P_{(l,3)}$	$1{,}72_{10}2$ [2]	$9{,}83_{10}1$	$8{,}32_{10}1$	$7{,}67_{10}1$	$8{,}14_{10}1$
$P_{(l,4)}$	$1{,}50_{10}2$	$1{,}00_{10}2$	$8{,}58_{10}1$	$7{,}86_{10}1$	$8{,}15_{10}1$
$P_{(l,5)}$	$1{,}18_{10}2$	$9{,}47_{10}1$	$8{,}58_{10}1$	$7{,}84_{10}1$	$7{,}59_{10}1$
$P_{(l,6)}$	$(\beta_1 < 0)$	$(\beta_1 < 0)$	$(\beta_1 < 0)$	$(\beta_1 < 0)$	$(\beta_1 < 0)$
$P_{(l,7)}$	$(\beta_1 < 0)$	$(\beta_1 < 0)$	$(\beta_1 < 0)$	$(\beta_1 < 0)$	$(\beta_1 < 0)$
$P_{(l,8)}$	$(\beta_1 < 0)$	$(\beta_1 < 0)$	$(\beta_1 < 0)$	$(\beta_1 < 0)$	$(\beta_1 < 0)$

Bemerkungen : 1) vgl. (5.1-8)
2) $s^* = 14$

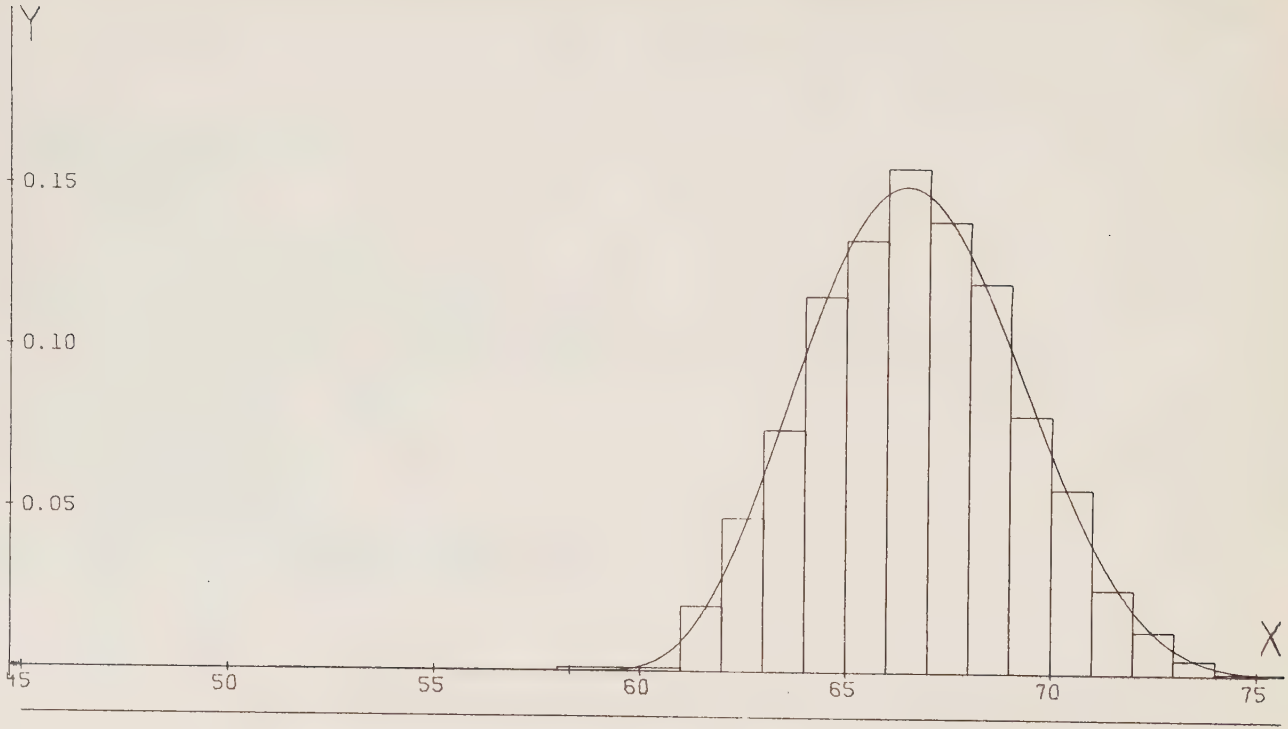
	Umgebungsabsuchen				
	l = 11	l = 12	l = 13	l = 14	l = 15
Angaben zum Ellipsenpunkt $P_{(1,0)}$:					
$\beta_1^{(1,0)}$	$2{,}13_{10}{-2}$	$2{,}13_{10}{-2}$	$2{,}13_{10}{-2}$	$2{,}13_{10}{-2}$	$2{,}13_{10}{-2}$
$\beta_2^{(1,0)}$	2,65	2,67	2,67	2,68	2,6754
$X^2_{(1,0)}(\mathcal{G})$	$6{,}59_{10}1$	$6{,}24_{10}1$	$6{,}10_{10}1$	$6{,}10_{10}1$	$6{,}10_{10}1$
$s^*_{(1,0)}$	13	13	13	13	13
Hauptradius $r_{1,(1)}$	$7{,}81_{10}{-3}$	$7{,}81_{10}{-3}$	$3{,}91_{10}{-3}$	$3{,}91_{10}{-3}$	$1{,}95_{10}{-3}$
Nebenradius $r_{2,(1)}$	$1{,}56_{10}{-2}$	$1{,}56_{10}{-2}$	$7{,}81_{10}{-3}$	$7{,}81_{10}{-3}$	$3{,}91_{10}{-3}$
Betrachtete Ellipsenpunkte :	$X^2_{(1,J)}(\mathcal{G})$-Werte[1]				
$P_{(1,1)}$	$6{,}24_{10}1$	$7{,}42_{10}1$	$6{,}10_{10}1$	$7{,}42_{10}1$ [2]	$6{,}03_{10}1$
$P_{(1,2)}$	$6{,}94_{10}1$	$6{,}60_{10}1$	$6{,}38_{10}1$	$6{,}24_{10}1$	$6{,}15_{10}1$
$P_{(1,3)}$	$7{,}61_{10}1$	$7{,}18_{10}1$	$6{,}62_{10}1$	$6{,}46_{10}1$	$6{,}25_{10}1$
$P_{(1,4)}$	$7{,}57_{10}1$	$7{,}10_{10}1$	$6{,}61_{10}1$	$6{,}44_{10}1$	$6{,}25_{10}1$
$P_{(1,5)}$	$7{,}04_{10}1$	$6{,}59_{10}1$	$6{,}40_{10}1$	$6{,}24_{10}1$	$6{,}16_{10}1$
$P_{(1,6)}$	$8{,}00_{10}1$	$7{,}89_{10}1$ [2]	$7{,}57_{10}1$ [2]	$7{,}56_{10}1$ [2]	$7{,}46_{10}1$ [2]
$P_{(1,7)}$	$8{,}31_{10}1$	$8{,}28_{10}1$ [2]	$7{,}67_{10}1$ [2]	$7{,}68_{10}1$ [2]	$7{,}50_{10}1$ [2]
$P_{(1,8)}$	$7{,}88_{10}1$	$7{,}90_{10}1$ [2]	$7{,}56_{10}1$ [2]	$7{,}59_{10}1$ [2]	$7{,}47_{10}1$ [2]

Bemerkungen : 1) vgl. (5.1-8)

2) $s^* = 14$

	I = 15, J = 1				
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	66,70				
Standardabweichung ($\sigma = \sqrt{\mu_2}$)	2,51				
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	0,15				
PEARSONscher Koeffizient β_1 (= μ_3^{*2})	$2,13_{10}-2$				
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	2,68				
PEARSONscher Koeffizient ε	$- 2,29_{10}-2$				
PEARSON-Typ	I				
Zugehörige Parameterwerte :					
In Falle von Typ I: x_2	58,30				
In Falle von Typ I: x_1	78,06				
In Falle von Typ I: s_2	5,00				
In Falle von Typ I: s_1	7,11				
In Falle von Typ I: y^*	$1,14_{10}-13$				
Bemerkungen :					

Intervall i	Emp. Häufigk. h_i	l = 15, j = 1									
		$n \cdot \tilde{\pi}_{(l,j)i}$	$X^2_{(l,j)\,i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
1	21	0									
2	75	128,4	0,86								
3	526	471,0									
4	1237	1151,7	6,31								
5	1947	2069,9	7,30								
6	3019	2995,0	0,19								
7	3475	3663,1	9,66								
8	4054	3890,6	6,86								
9	3631	3638,4	$1,52_{10}-2$								
10	3133	3010,5	4,99								
11	2075	2198,6	6,83								
12	1485	1400,2	5,13								
13	680	763,0	9,04								
14	343	343,6	$8,92_{10}-4$								
15	118	120,6	3,12								
16	59	34,4									
$\sum_s (= X^2_{(l,j)}(\sigma))$			60,31								
			13								



Zeichnung 5.2 - B24 - Z1

KOERPERGROESSENVERTEILUNG IV

NACHBERECHNUNG, SCHRITT 15.1

BEISPIEL [5.2 - B 25] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathcal{G}$) :

Verteilung von Arbeitern (Männer und Frauen) aus der gesamten Industrie der BRD nach der Höhe ihres Bruttostundenverdienstes (in DM) im Jahre 1972 (Promilleverteilung)

Quelle : 28 , 6A, S.88 f

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : DM

Stichprobenumfang (n) : 999

Zahl der Klassen (s) von $\mathcal{G}$: 27

Klassengrenzen (x_i) von $\mathcal{G}$:

$x_0 = 1{,}5^{1)}$, $x_1 = 2{,}7$, $x_3 = 3{,}1$, $x_4 = 3{,}5$, ..., $x_{26} = 12{,}7$, $x_{27} = 15^{1)}$

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathcal{G}$ (Zerlegung $\tilde{\mathcal{F}}$) :

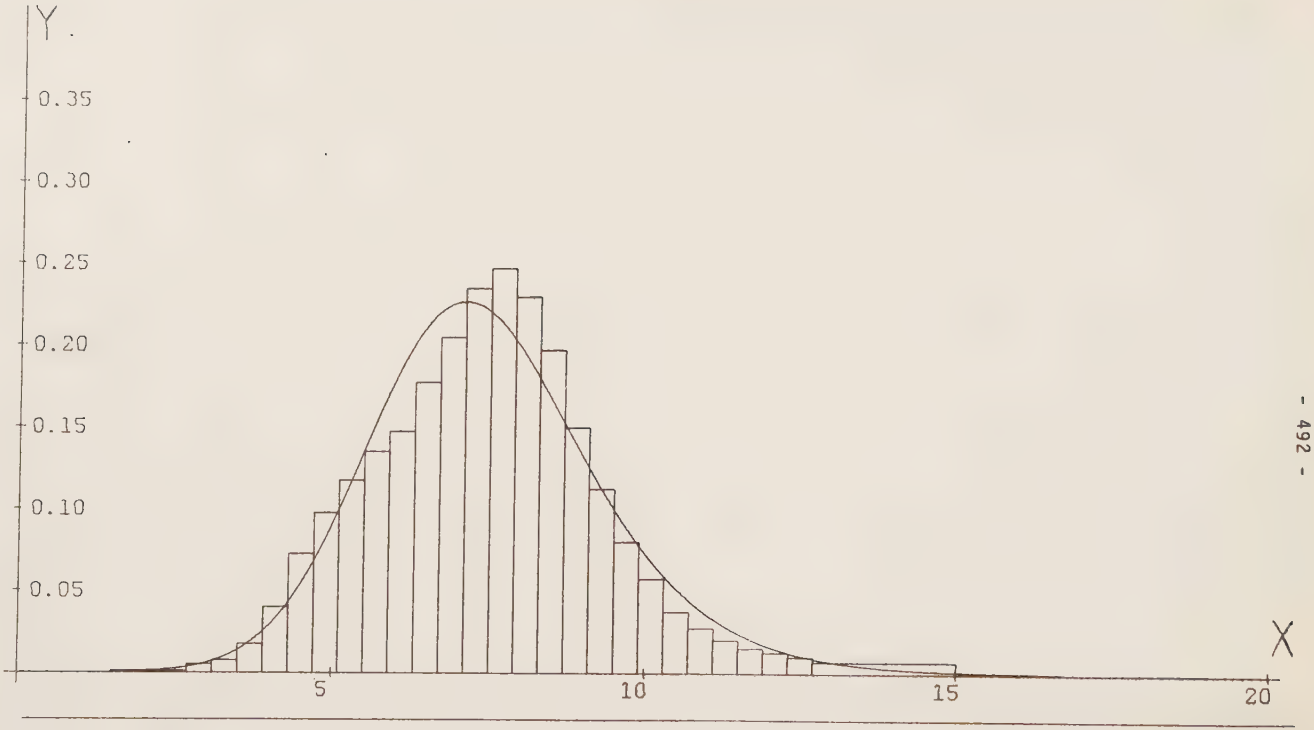
$n_1 = 60$, $n_2 = \ldots = n_{26} = 20$, $n_{27} = 100$

Bemerkungen :

	Approximationsschritt				
	k = 1	k = 4			
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	7,51	7,51			
Standardabweichung ($\sigma = \sqrt{\mu_2}$)	1,89	1,87			
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	0,56	0,49			
PEARSONscher Koeffizient β_1 (= μ_3^{*2})	0,32	0,26			
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	4,03	3,86			
PEARSONscher Koeffizient æ	0,23	0,22			
PEARSON-Typ	II	II			
Zugehörige Parameterwerte :					
In Falle von					
Typ I: x_2 / Typ II: r / Typ III: x_2	4,15	4,01			
Typ I: x_1 / Typ II: q / Typ III: x_1	6,13	6,53			
Typ I: s_2 / Typ II: s / Typ III: s_2	8,32	9,33			
Typ I: s_1 / Typ II: ν / Typ III: s_1	- 8,04	- 8,91			
Typ I: y^* / Typ II: y^* / Typ III: y^*	$4{,}51_{10}11$	$4{,}65_{10}13$			
Bemerkungen :					

Intervall i	Emp. Häufigk h_i	Approximationsschritt k = 1		k = 4							
		$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
1	1	1,6		1,6							
2	2	2,0	0,38	2,0	0,38						
3	3	4,0		4,0							
4	7	7,5	$3,73_{10}{}^{-2}$	7,5	$3,85_{10}{}^{-2}$						
5	16	13,2	0,58	13,2	0,58						
6	29	21,7	2,47	21,6	2,52						
7	39	33,0	1,09	32,8	1,16						
8	47	46,6	$3,01_{10}{}^{-3}$	46,3	$1,00_{10}{}^{-2}$						
9	54	61,1	0,82	60,7	0,74						
10	59	74,4	3,18	74,0	3,03						
11	71	84,5	2,15	84,2	2,07						
12	82	89,9	0,69	89,8	0,68						
13	94	90,0	0,18	90,3	0,15						
14	99	85,4	2,17	85,9	1,98						
15	92	77,2	2,84	77,9	2,55						
16	79	66,9	2,21	67,6	1,92						
17	60	55,8	0,32	56,5	0,22						
18	45	45,1	$2,95_4$-10	45,6	$8,52_{10}{}^{-3}$						
19	32	35,5	0,35	35,8	0,41						
20	23	27,3	0,68	27,4	0,72						

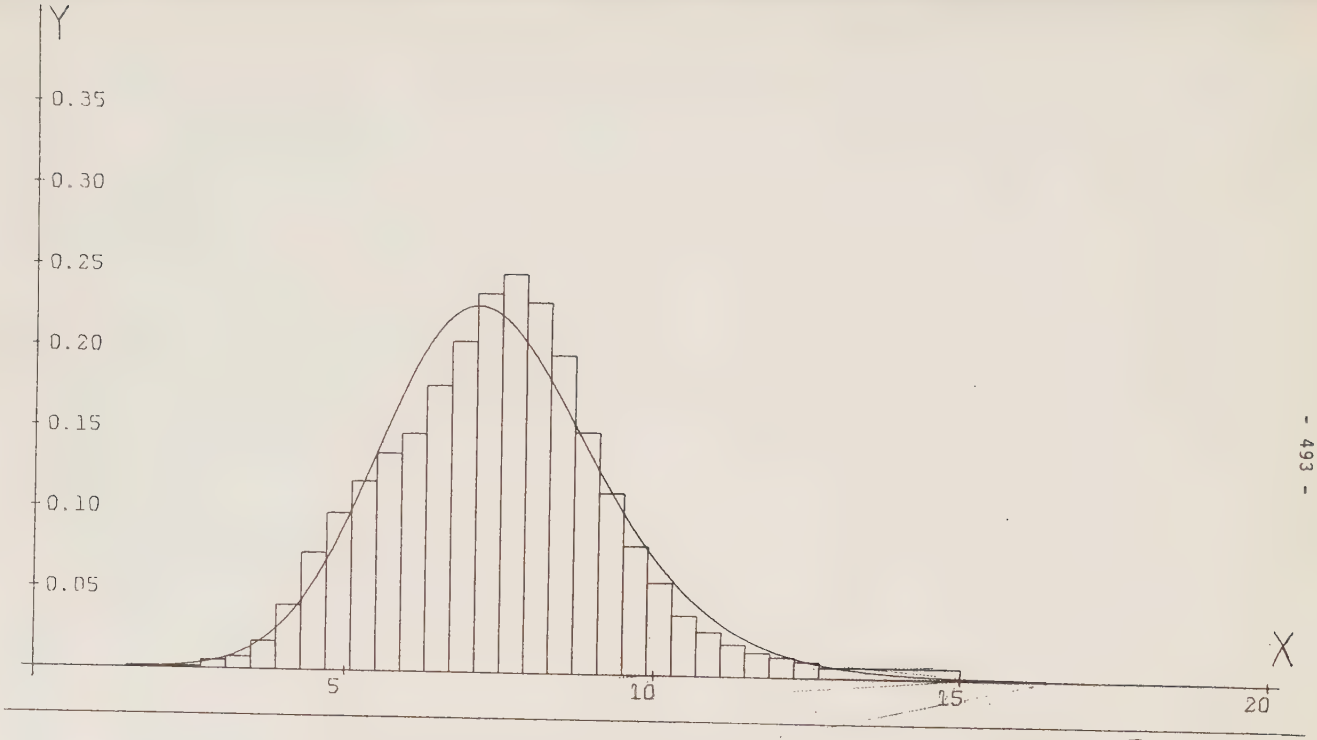
Fortsetzung		Approximationsschritt									
		k = 1		k = 4							
Intervall i	Emp. Häufigk h_i	$n \cdot \tilde{\pi}(k),i$	$X^2(k),i$	$n \cdot \tilde{\pi}(k),i$	$X^2(k),i$	$n \cdot \tilde{\pi}(k),i$	$X^2(k),i$	$n \cdot \tilde{\pi}(k),i$	$X^2(k),i$	$n \cdot \tilde{\pi}(k),i$	$X^2(k),i$
21	15	20,6	1,54	20,6	1,52						
22	11	15,3	1,23	15,2	1,16						
23	8	11,3	0,95	11,1	0,85						
24	6	8,2	0,59	8,0	0,48						
25	5	5,9	0,14	5,7	$7,88_{10}{}^{-2}$						
26	4	4,2	2,01	4,0	3,50						
27	16	10,3		9,2							
Σ			26,58		26,76						
Zahl der Freiheitsgrade (F.G.)			19		19						
χ^2 (α=0,05; F.G.)			30,14		30,14						



Zeichnung [5.2 - B25 - Z1]

LØEHNE 72, BRD, ARBEITER (M+F)

BRUTTØ-STD-LØEHNE, 1. APPR.-SCHRITT



LOEHNE 72, BRD, ARBEITER (M+F)

BRUTTO-STD-LOEHNE, 4. APPR.-SCHRITT

BEISPIEL [5.2 - B26] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathfrak{H}$) :

Verteilung von Arbeiterinnen aus der gesamten Industrie der BRD nach der Höhe ihres Bruttostundenverdienstes (in DM) im Jahre 1972 (Promilleverteilung)

Quelle : [28], 6 A, S. 80*f

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : DM

Stichprobenumfang (n) : 1001

Zahl der Klassen (s) von $\mathfrak{H}$: 27

Klassengrenzen (x_i) von $\mathfrak{H}$:

$x_0 = 1{,}5$ [1], $x_1 = 2{,}7$, $x_2 = 3{,}1$, $x_3 = 3{,}5$, ..., $x_{26} = 12{,}7$, $x_{27} = 15$ [1]

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathfrak{H}$ (Zerlegung $\tilde{\mathfrak{F}}$) :

$n_1 = 96$, $n_2 = \ldots = n_{26} = 32$, $n_{27} = 100$

Bemerkungen :

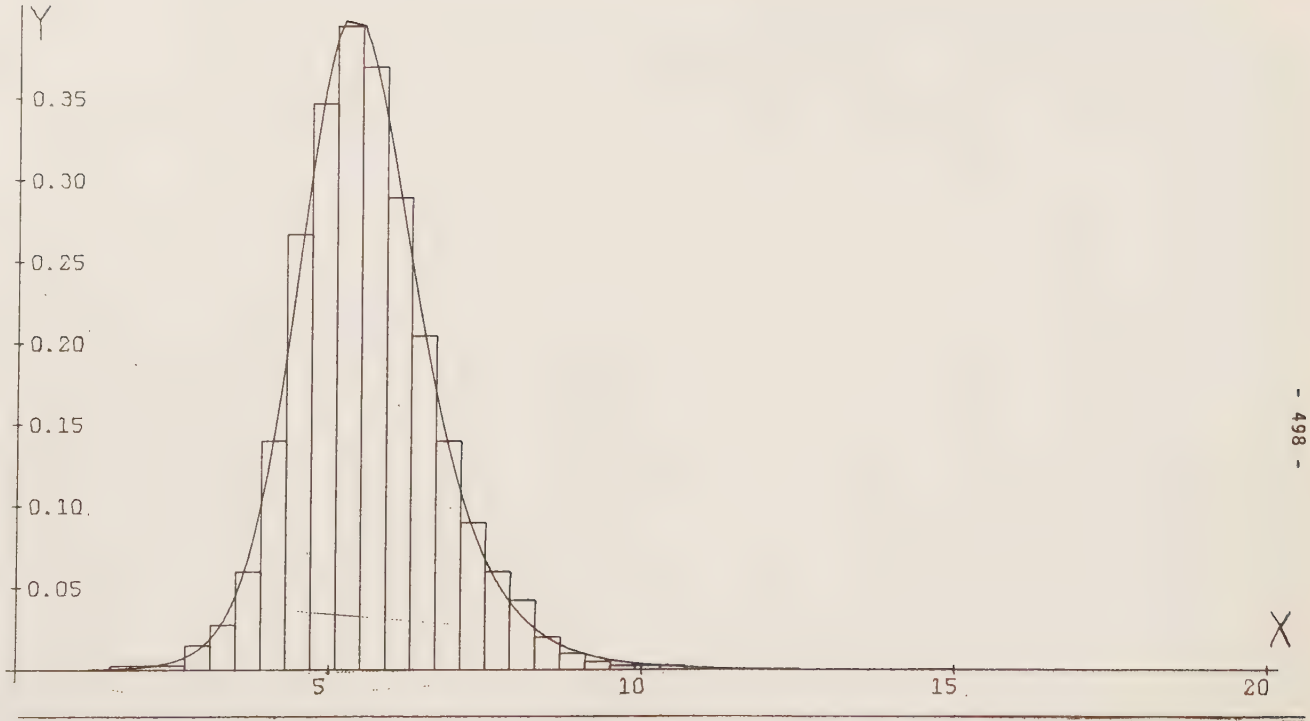
---

[1] angenommene Werte

	Approximationsschritt				
	k = 1	k = 3			
Momentenwerte der ermittelten PEARSON-Funktion :					
Mittelwert (μ'_1)	5,60	5,60			
Standardabweichung ($\sigma = \sqrt{\mu_2}$)	1,16	1,15			
3.standard.Moment ($\mu_3^* = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$)	0,80	0,79			
PEARSONscher Koeffizient β_1 ($= \mu_3^{*2}$)	0,64	0,63			
4.standard.Moment ($\mu_4^* = \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$)	6,07	5,86			
PEARSONscher Koeffizient æ	0,14	0,15			
PEARSON-Typ	II	II			
Zugehörige Parameterwerte :					
In Falle von Typ I / Typ II / Typ III					
x_2 / r / x_2	4,61	4,54			
x_1 / q / x_1	2,47	2,57			
s_2 / s / s_2	4,14	4,32			
s_1 / ϑ / s_1	- 2,51	- 2,79			
y^* / y^* / y^*	$4,91_{10}2$	$7,27_{10}2$			
Bemerkungen :					

Intervall i	Emp. Häufigk. h_i	Approximationsschritt k = 1		k = 3							
		$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
1	3	3,2	$5{,}75_{10}{}^{-2}$	2,8	0,30						
2	6	4,9		4,6							
3	11	12,0	$8{,}24_{10}{}^{-2}$	11,6	$2{,}62_{10}{}^{-2}$						
4	24	27,5	0,45	27,2	0,36						
5	56	56,5	$4{,}46_{10}{}^{-3}$	56,6	$5{,}97_{10}{}^{-3}$						
6	107	98,3	0,77	99,0	0,65						
7	139	139,4	$1{,}20_{10}{}^{-3}$	140,2	$1{,}09_{10}{}^{-2}$						
8	158	159,3	$1{,}12_{10}{}^{-2}$	159,8	$2{,}13_{10}{}^{-2}$						
9	148	149,4	$1{,}27_{10}{}^{-2}$	149,5	$1{,}55_{10}{}^{-2}$						
10	116	119,2	$8{,}69_{10}{}^{-2}$	119,2	$8{,}72_{10}{}^{-2}$						
11	82	84,6	$8{,}02_{10}{}^{-2}$	84,6	$8{,}01_{10}{}^{-2}$						
12	56	55,6	$3{,}54_{10}{}^{-2}$	55,6	$3{,}57_{10}{}^{-3}$						
13	36	34,8	$3{,}84_{10}{}^{-2}$	34,8	$4{,}01_{10}{}^{-2}$						
14	24	21,4	0,33	21,3	0,34						
15	17	13,0	1,24	12,9	1,29						
16	8	7,9	$7{,}31_{10}{}^{-4}$	7,8	$2{,}90_{10}{}^{-3}$						
17	4	4,9		4,8							
18	2	3,0		3,0							
19	1	1,9	(0,94)	1,9	(0,78)						
20	1	1,2		1,2							

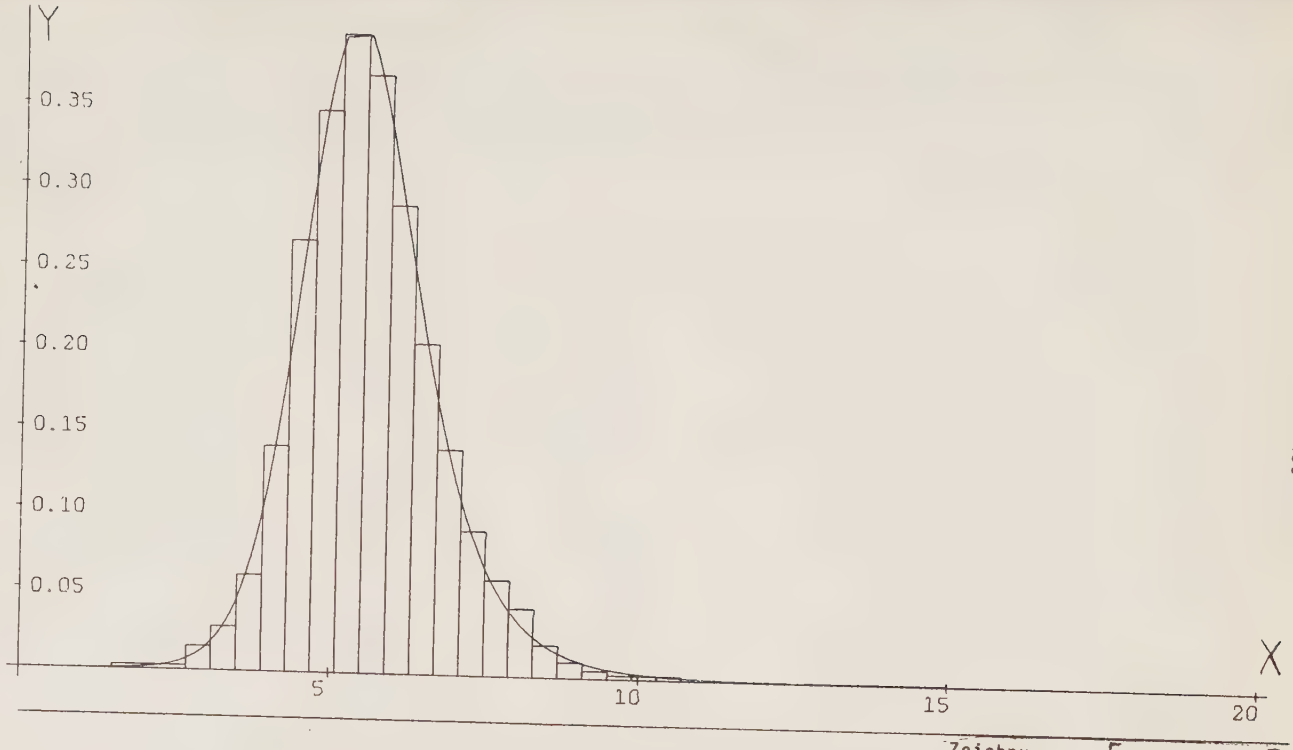
Fortsetzung		Approximationsschritt									
		k = 1		k = 3							
Intervall i	Emp. Häufigk. h_i	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
⋮		⋮		⋮							
21	1	0,8		0,8							
22	0	0,5		0,5							
23	0	0,4		0,3							
24	0	0,2	0,94	0,2	0,78						
25	0	0,2		0,2							
26	0	0,1		0,1							
27	1	0,3		0,2							
			4,11		4,02						
Zahl der Freiheitsgrade (F.G.)			11		11						
$\chi^2(\alpha=0,05;$ F.G.)			19,67		19,67						



Zeichnung [5.2 - B26 - Z1]

LOEHNE 72, BRD, ARBEITERINNEN

BRUTTO-STD-LOEHNE, 1. APPR.-SCHRITT



Zeichnung [5.2 - B26 - Z2]

LOEHNE 72, BRD, ARBEITERINNEN

BRUTTO-STD-LOEHNE, 3. APPR.-SCHRITT

BEISPIEL [5.2 - B27] :

Betrachtete empirische Häufigkeitsverteilung ($\mathcal{G}$) :

Verteilung von Arbeitern (Männer und Frauen) aus der gesamten Industrie der BRD nach der Höhe ihres Bruttostundenverdienstes (in DM) im Jahre 1972 (Promilleverteilung)

Quelle : [28], 6 A, S. 88 ff

Dimension der betrachteten Zufallsvariable : DM

Stichprobenumfang (n) : 999

Zahl der Klassen (s) von $\mathcal{G}$: 27

Klassengrenzen (x_i) von $\mathcal{G}$:

$X_0 = 1{,}5$ [1], $X_1 = 2{,}7$, $X_3 = 3{,}1$, $X_4 = 3{,}5$, ..., $X_{26} = 12{,}7$, $X_{27} = 15$ [1]

Zahl der Unterteilungen (n_i) der einzelnen Intervalle von $\mathcal{G}$ (Zerlegung $\mathcal{F}$) :

vgl. [5.2 - B 21, 22, 26]

Bemerkungen :

In diesem Beispiel betrachten wir als Approximationsfunktion zur oben angegebenen Verteilung die Funktion $f(X) = P_1 f_1(X) + P_2 f_2(X)$, wobei
(1) $f_1(X)$ die in [5.2 - B 21] , Schritt 4 und
(2) $f_1(X)$ die in [5.2 - B 22] , Schritt 17.1
ermittelte Approximationsfunktion zur Bruttostundenlohnverteilung der Arbeiter und
$f_2(X)$ die in [5.2 - B 26] , Schritt 3 ermittelte Approximationsfunktion der Arbeiterinnen ist und
P_1 (= 75,7) und P_2 (= 24,3) die Anteile der Männer und der Frauen an der Gesamtarbeiterschaft im Bereich der gesamten Industrie der BRD - im Jahre 1972 - sind [2].

---

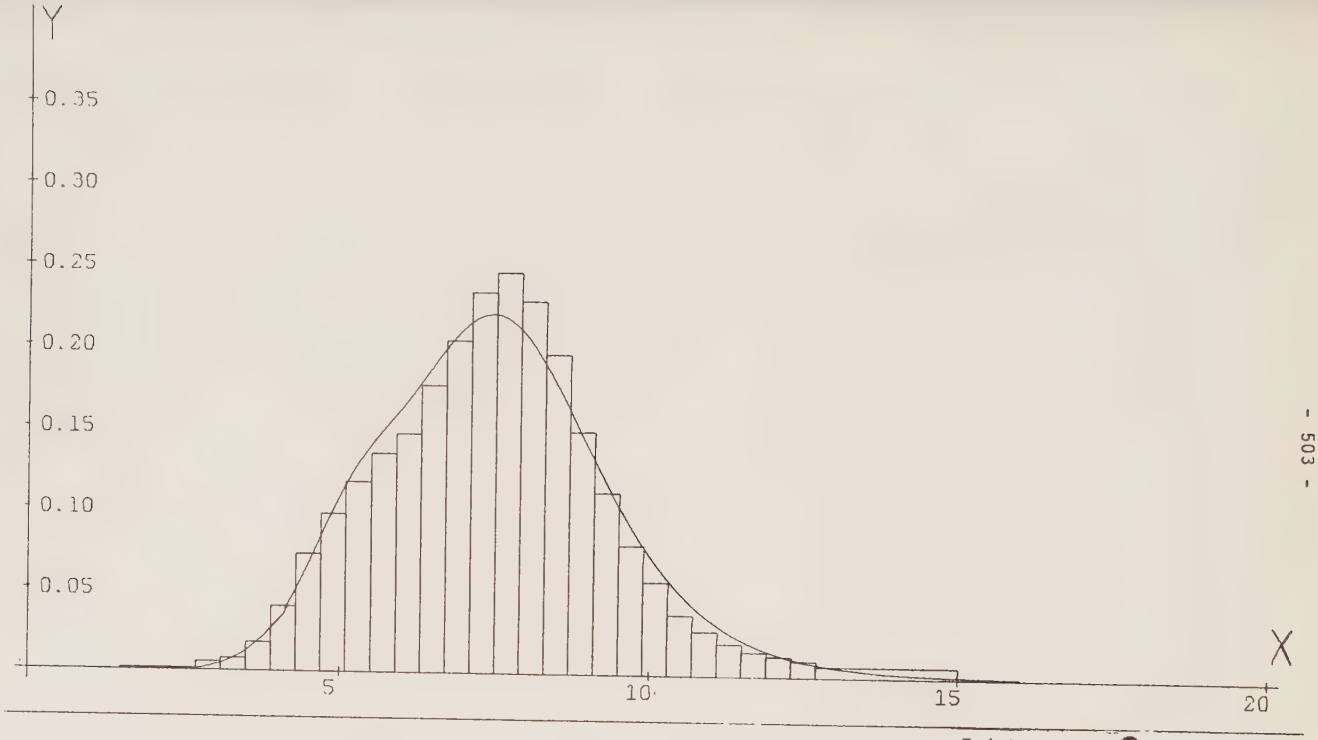
1) angenommene Werte

2) vgl. [28], 6 A, S. 22

Intervall i	Emp. Häufigk h_i	Vergleichsart (1) $n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	(1) $X^2_{(k),i}$	Vergleichsart (2) $n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	(2) $X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
1	1	0,7		1,1							
2	2	1,1	0,27	1,4	$1,00_{10}{}^{-2}$						
3	3	2,9		3,3							
4	7	6,9	$1,32_{10}{}^{-2}$	7,4	$2,71_{10}{}^{-2}$						
5	16	14,6	0,13	15,3	$3,62_{10}{}^{-2}$						
6	29	26,4	0,25	26,8	0,18						
7	39	39,9	$1,93_{10}{}^{-2}$	39,2	$8,02_{10}{}^{-4}$						
8	47	51,3	0,36	48,3	$3,68_{10}{}^{-2}$						
9	54	59,7	0,54	53,7	$1,76_{10}{}^{-3}$						
10	59	67,3	1,03	59,3	$1,10_{10}{}^{-3}$						
11	71	75,7	0,29	63,3	$4,01_{10}{}^{-2}$						
12	82	83,6	$3,08_{10}{}^{-2}$	83,2	$1,87_{10}{}^{-2}$						
13	94	88,2	0,38	95,6	$2,53_{10}{}^{-2}$						
14	99	87,6	1,50	99,5	$2,30_{10}{}^{-3}$						
15	92	81,5	1,36	92,8	$6,63_{10}{}^{-3}$						
16	79	71,4	0,80	78,5	$2,74_{10}{}^{-3}$						
17	60	59,5	$4,30_{10}{}^{-3}$	61,7	$4,79_{10}{}^{-2}$						
18	45	47,5	0,13	46,1	$2,61_{10}{}^{-2}$						
19	32	36,6	0,59	33,4	$5,59_{10}{}^{-2}$						
20	23	27,5	0,74	23,8	$2,38_{10}{}^{-2}$						

Fortsetzung		Vergleichsart									
		(1)		(2)							
Intervall i	Emp. Häufigk h_i	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$	$n \cdot \tilde{\pi}_{(k),i}$	$X^2_{(k),i}$
21	15	20,2	1,36	16,8	0,19						
22	11	14,6	0,91	11,9	$6,67_{10}$-2						
23	8	10,5	0,59	8,5	$2,48_{10}$-2						
24	6	7,5	0,29	6,1	$6,82_{10}$-2						
25	5	5,3	$1,46_{10}$-2	4,4	} 0,26						
26	4	3,7	} 2,65	3,2							
27	16	9,0		10,3 [1]	3,10						
$\sum_{s^*}$ (= X^2_0 (s*))			14,22		4,85						
			24		24						

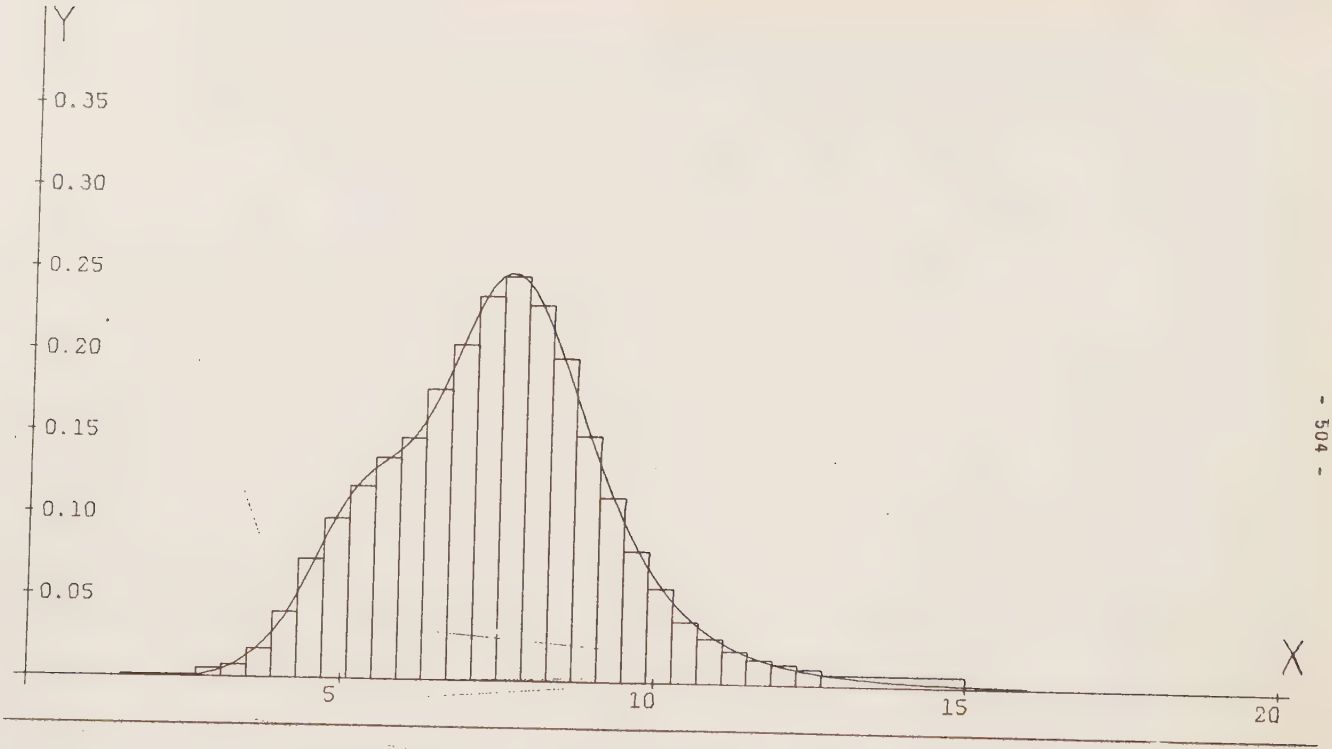
1) Einschließlich der sich in diesem Beispiel bemerkbar machenden Beiträge außerhalb des angegebenen Definitionsbereiches der empirischen Verteilung.



Zeichnung 5.2 - B27 - 17

LOEHNE 72, BRD, ARBEITER (M+F)

BRUTTO-STD-LOEHNE, UEBERLAGERUNG (1)



Zeichnung [5.2 - B27 - Z2]

LOEHNE 72, BRD, ARBEITER (M+F)

BRUTTO-STD-LOEHNE, UEBERLAGERUNG (2)

Literatur

[1] ELDERTON / JOHNSON, Systems of Frequency Curves, Cambridge Univ. Press, 1969

[2] ORD, Families of Frequency Curves, Griffin, London, 1972

[3] KENDALL / STUART, Advanced Theory of Statistics, Griffin, London

[4] JOHNSON, N.L. (1949), Systems of frequency curves generated by methods of translation, Biometrika, 36, S. 149-176.

[5] SZEGÖ, Orthogonal Polynomials, New York, Americ. Math. Soc., 1939

[6] TRICOMI, Reihenentwicklungen nach OG-Funktionen, Springer, Berlin

[7] ERDELYI, A. et al. (1953), Higher Transcendental Functions, Vol. 2, New York, McGraw-Hill

[8] ROMANOVSKY, V. (1924), Generalisation of some types of the frequency curves of Professor Pearson, Biometrika, 16, S. 106-116.

[9] BARTON, D.E. und DENNIS, K.E. (1952), The conditions under which the Gram-Charlier and Edgeworth curves are positive definite and unimodal, Biometrika, 39, S. 425-427.

[10] BURR, I.W. (1942), Cumulative frequency functions, Ann. Math. Statist., 13, S. 215-232.

[11] MENGES, G. und SKALA, H., Grundriß der Statistik, Teil 2: Daten, Opladen, 1973

[12] BIOMETRIKA TABLES, Cambridge, University Press, 1972

[13] JOHNSON, N.L. and KOTZ, S., Continuos univariate distributions, Vol. 1 and 2, Hougthon Mifflin Company, Boston, 1970

[14] HILDEBRANDT, E.H. (1931), Systems of Polynomials connected with the Charlier Expansions and the Pearson Differential and Difference Equations, Annals of Mathem. Statistics, 2, S. 379-439.

[15] CRAMER, Mathem. Methods of Statistics, Princeton, 1966

[16] FISZ, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathem. Statistik, Berlin, 1971

[17] PAIRMAN, E. and PEARSON, K. (1919), On corrections for the moment coefficients of limited range frequency distributions when there are finite or infinite ordinates and any slopes at the terminals of the range, Biometrika, 12, S. 231-258.

[18] KUPPERMAN, M., Exact grouping corrections to moments and cumulants, Biometrika, 39(1952), S. 429-434.

[19] PEARSE, G.E., On corrections for the moment coefficients of frequency distributions when there are infinite ordinates at one or both of the terminals of the range, Biometrika, 20A(1928), S. 314-355.

[20] YULE, G.U., On some properties of the normal distribution, univariate and bivariate, based on the sums of squares of frequencies, Biometrika, 30(1938), S. 1-10.

[21] SICHEL, H.S., Fitting growth and frequency curocs by the method of frequency moments, J. Royal Stat. Soc., Ser. A, 110(1947), S. 337-347.

[22] SICHEL, H.S., The method of frequency moments and its application to Type VII populations, Biometrika, 62(1949), S. 404-425.

[23] KREYSZIG, E., Stat. Methoden und ihre Anwendungen, Göttingen, 1975

[24] STUMMEL, F. u. HAINER, K., Praktische Mathematik, Teubner, Stuttgart, 1971

[25] WEBER, E., Grundriß der biologischen Statistik, Fischer, Jena, 1948

[26] WINKLER, W., Theoretische Statistik, Wien, 1947

[27] Statistisches Amt der EG, Sozialstatistik, Sonderreihe, Struktur und Verteilung der Löhne 1966, Luxemburg

[28] Statistisches Amt der EG, Sozialstatistik, Sonderreihe, Gehalts- und Lohnstruktur in der Industrie 1972, Luxemburg

[29] HOEL, Introduction to Mathem. Statistics, John Wiley and Sons, New York, London, 2. edition, 1954

[30] PFANZAGL, Allgemeine Methodenlehre der Statistik, I und II, Göschen, Berlin, 1966

[31] STANGE, K., Angewandte Statistik, Teil I: Eindimensionale Probleme, Teil II: Mehrdimensionale Probleme, Berlin/Heidelberg/New York 1970/71

[32] MANN, H.B. and WALD, A., On the choice of the number of class intervals in the application of the chi-square-test, Annals of Math. Statistics, 18(1947), S. 50 ff.

[33] SACHS, L., Statistische Auswertungsmethoden, Berlin u.a., 1968

[34] SCHMETTERER, L., Einführung in die mathematische Statistik, Wien, 1956

[35] Kleine Enzyklopädie, Mathematik, Basel, 1969